НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 6.
Векторные расслоения-I. 18.03.2013.

Для получения зачёта в каждом из листков необходимо решить не менее трёх задач.

Задача 1. Пусть $E \subset \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ состоит из таких пар (l, v), что если рассмотреть $l \in \mathbb{R}P^n$ как прямую в $\mathbb{R}^{n+1}$, то $v \in l$. Пусть $p : E \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ естественная проекция, индуцированная проекцией из прямого произведения $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ на первый сомножитель. Доказать, что $E \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^n$ — гладкое векторное локально тривиальное расслоение ранга 1 и найти его склеивающие коциклы при выборе стандартных аффинных подмножеств $\mathbb{R}P^n$ в качестве тривиализирующего покрытия. Это расслоение называется универсальным или тавтологическим расслоением над $\mathbb{R}P^n$.

Построить аналогично универсальное (или тавтологическое) расслоение над многообразием Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$ и найти его склеивающие коциклы.

Задача 2. Пусть $\xi = (E, p, B)$ локально тривиальное расслоение, U_α тривиализующие окрестности, а $g_{\alpha\beta}$ соответствующие склеивающие коциклы. Рассмотрим расслоение $f^*\xi$, где $f : M \longrightarrow B$. Докажите, что $f^*g_{\alpha\beta}$, определённые формулой

$$f^*g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(f(x)),$$

задают склеивающие коциклы для $f^*\xi$ для тривиализующего покрытия множествами $f^{-1}(U_\alpha)$.

Задача 3. Пусть ξ векторное расслоение. Объясните, как строить склеивающие коциклы для расслоений ξ^*, $\xi \wedge \xi$.

Задача 4. Для комплексного векторного расслоения ξ объясните, как строить коциклы для его овеществления $r\xi$, а для вещественного векторного расслоения ξ объясните, как строить коциклы для его комплексификации $\xi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Задача 5. Являются ли тривиальными касательные расслоения TS^1, TS^2, TS^3?

Задача 6. Приведите пример двух нетривиальных векторных расслоений, таких что их прямая сумма — тривиальное расслоение.

Приведите пример двух нетривиальных векторных расслоений, таких что их произведение — тривиальное расслоение.