

**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 2.**  
**Поверхности в трёхмерном и  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Ковариантная производная касательных и нормальных векторов, вторая квадратичная форма и оператор Вейнгартена. 18.02.2013.**

*Для получения зачёта в каждом из листков необходимо решить не менее трёх задач.*

**Задача 1.** Найти первую и вторую квадратичные формы, гауссову и среднюю кривизны для сферы произвольного радиуса  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . Найти также оператор Вейнгартена и ковариантные производные.

**Задача 2.** Доказать, что поверхность с нулевыми гауссовой и средней кривизнами есть плоскость.

**Задача 3.** Найти первую и вторую квадратичные формы, а также гауссову и среднюю кривизны для поверхности вращения

$$\mathbf{r}(u, \varphi) = (x(u), \rho(u) \cos \varphi, \rho(u) \sin \varphi).$$

Доказать, что единственными поверхностями вращения имеющими нулевую среднюю кривизну являются плоскость и катеноид, получаемый вращением кривой  $\left(\frac{\operatorname{ch}(at + b)}{a}, t\right)$ .

**Задача 4.** Доказать, что средняя кривизна есть интегральное среднее всех нормальных кривизн

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k(\varphi) d\varphi,$$

где  $k(\varphi)$  — нормальная кривизна в направлении  $\varphi$ , отсчитываемом от одного из главных направлений.

**Задача 5.** Рассмотрим двумерную поверхность  $M$  в  $\mathbb{E}^3$  и точку  $A \in M$ . Выберем нормаль  $\mathbf{m}$  в точке  $A$ . Запишем  $B(X, Y)$  в виде  $B(X, Y) = \hat{B}(X, Y)\mathbf{m}$ , где  $\hat{B}$  некоторая обычная (вещественнозначная) квадратичная форма на касательной плоскости. Доказать, что  $\hat{B}(X, Y) = \mathbf{II}(X, Y)$ , то есть это вторая квадратичная форма поверхности.

**Задача 6.** Рассмотрим двумерную поверхность в  $\mathbb{E}^3$ . В качестве базиса нормального пространства выберем единичный нормальный вектор  $\eta_1 = \mathbf{m}$ . Доказать, что  $W_{\eta_1} = \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{II}$ . Вывести отсюда, что определения главных кривизн для поверхностей в трёхмерном (через первую и вторую квадратичную форму) и  $n$ -мерном пространстве (через оператор Вейнгартена) совпадают.