НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 12. Оператор Лапласа-Бельтрами, минимальные подмногообразия, гармонические отображения. 20.05.2013.

Для получения зачёта в каждом из листков необходимо решить не менее трёх задач.

Задача 1. Доказать обобщённую теорему Гаусса-Остроградского: если риманово многообразие с краем M компактно и ориентировано, то

$$\int_M \operatorname{Div} X d\mu_M = \int_{\partial M} (X, \vec{n}) d\mu_{\partial M},$$

где $\vec{n}$ — внешнее нормальное поле к ∂M в $TM|_{\partial M}$, а $d\mu_M$ и $d\mu_{\partial M}$ — формы объема, индуцированные $(\cdot\,,\cdot)$ и $(\cdot\,,\cdot)|_{\partial M}$, соответственно.

Задача 2. Пусть риманово многообразие с краем M компактно и ориентировано, и $f, g \in C^\infty(M)$. Доказать, что

$$\int_M [g\Delta f - (dg, df)] d\mu_M = \int_{\partial M} g(\vec{n} \cdot f) d\mu_{\partial M},$$

где $\vec{n}$ — внешнее нормальное поле к ∂M в $TM|_{\partial M}$, а $d\mu_M$ и $d\mu_{\partial M}$ — формы объема, индуцированные $(\cdot\,,\cdot)$ и $(\cdot\,,\cdot)|_{\partial M}$, соответственно.

Задача 3. Вывести из предыдущей задачи, что на ориентированном компактном римановом многообразии без края в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ верна формула

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right),$$

где $|g| = \det g_{ij}$. Доказать, что эта формула верна и для некомпатных и неориентируемых многообразий.

Задача 4. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ локальный ортонормированный базис в векторных полях в некоторой окрестности точки p многообразия M, а $c_1(t)$, $\ldots$, $c_n(t)$ — такие геодезические, что $c_i(0) = p$ и $c_i'(0) = e_i$. Доказать, что оператор Лапласа-Бельтрами можно найти по формуле

$$\Delta f(p) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2} f(c_i(t))|_{t=0}.$$

Задача 5. Доказать, что катеноид $f(s,t) = (\operatorname{ch} s \cos t, \operatorname{ch} s \sin t, s)$, геликоид $f(s,t) = (t\cos s, t\sin s, s)$ и поверхность Эннепера

$$f(s,t) = \left(\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6} + \frac{st^2}{2}, -\frac{t}{2} + \frac{t^3}{6} - \frac{s^2 t}{2}, \frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2} \right)$$

являются минимальными поверхностями в $\mathbb{R}^3$.

Задача 6. Рассмотрим дважды периодическое отображение

$$\Psi_{m,k} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4,$$

заданное явной формулой

$$\Psi_{m,k}(x,y) = (\cos mx \cos y, \sin mx \cos y, \cos kx \sin y, \sin kx \sin y).$$

Его образ в $\mathbb{R}^4$ обозначается $\tau_{m,k}$. Поверхности $\tau_{m,k}$ с индуцированной вложением в $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ метрикой называются τ-поверхностями Лоусона, в зависимости от типа их называют также лоусоновыми торами и лоусоновыми бутылками Клейна.

Доказать, что

- $\tau_{m,k}$ является погруженным (то есть с самопересечениями) подмногообразием единичной трёхмерной сферы размерности два;
- $\tau_{m,k} \cong \tau_{k,m}$;
- если $(m,k) = 1$, $(m',k') = 1$ и $(m,k) \neq (m',k')$ как неупорядоченные пары, то $\tau_{m,k} \ncong \tau_{k,m}$;
- пусть $(m,k) = 1$, тогда если m, k нечётные, то $\tau_{m,k}$ является тором, а если одно из чисел m, k является чётным, то $\tau_{m,k}$ является бутылкой Клейна;
- $\tau_{m,k}$ является минимальной поверхностью в $\mathbb{S}^3$;
- ограничения координатных функций объемлющего пространства на наши поверхности $x^i|_{\tau_{m,k}}$, $i = 1, \ldots, 4$, являются собственными фунциями оператора Лапласа-Бельтрами на $\tau_{m,k}$ с собственным числом 2;
- единственная поверхность $\tau_{m,k}$ без самопересечений — это $\tau_{1,1}$, индуцированная метрика на $\tau_{1,1}$ евклидова, то есть это тор Клиффорда.