НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Экзамен. 20.05.2013.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо <u>*не позднее*</u>*, чем 19:00 3 июня, отдать мне или положить в учебной части в почтовую ячейку с моим именем (А. Пенской) или оставить на вахте внизу в конверте с моим именем.*

Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день.

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно». Для того, чтобы экзамен был засчитан, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее половины задач, то есть 3 задачи.

Задача 1. Поверхность называется *линейчатой*, если она параметрически задается в виде $\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u)$. Докажите, что на линейчатой поверхности гауссова кривизна всюду неположительна *(5 баллов)*.

Задача 2. Из аналитической геометрии вы знаете примеры поверхностей, на которых есть два различных семейства прямолинейных образующих. Докажите, что если на гладкой двумерной поверхности в трехмерном пространстве есть три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является куском плоскости *(10 баллов)*.

Задача 3. Доказать, что в любой точке p группы Ли G с биинвариантной метрикой секционная кривизна в направлении любой 2-плоскости в T_pG неотрицательна *(10 баллов)*.

Задача 4. Пусть $[z_0 : \dots : z_n]$ однородные координаты в $\mathbb{R}P^n$. Напомним, что *отображение Веронезе* степени d — это отображение $\nu_d : \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^N$, заданное формулой

$$\nu_d([z_0 : \ldots : z_n]) = [\ldots : z^I : \ldots], \tag{1}$$

где z^I это некоторый моном степени d от $z_0, \ldots, z_n$, а в правой части (1) стоят все мономы степени d. Например, при $n = 2$ и $d = 2$ получаем отображение $\mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^5$, заданное формулой

$$\nu_2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 : z_1^2 : z_2^2 : z_0z_1 : z_0z_2 : z_1z_2].$$

Найдите обратный образ $\nu_d^*\gamma^1$ универсального расслоения при этом отображении. *(10 баллов)*.

Задача 5. Подмногообразие M риманова многообразия N с индуцированной метрикой называется вполне геодезическим, если все геодезические M являются в то же время и геодезическими N. Доказать, что M вполне геодезическое тогда и только тогда, когда вторая квадратичная форма нулевая. *(5 баллов)*.

Задача 6. Найдите $\mathrm{ch}(\xi_k)$, где ξ_k есть тривиальное расслоение ранга k *(5 баллов)*.

Задача 7. Докажите, что если многообразие M является границей некоторого многообразия W, то все числа Понтрягина M равны нулю. *(10 баллов)*.

Указание. Вспомните о функториальности классов Понтрягина и используйте теорему Стокса.

Задача 8*. Найти число Понтрягина

$$\langle p_1(r\gamma^1_{\mathbb{H}}), [\mathbb{S}^4]\rangle = \oint_{\mathbb{S}^4} p_1(r\gamma^1_{\mathbb{H}}),$$

где $\gamma^1_{\mathbb{H}} = (E \longrightarrow \mathbb{H}P^1 \simeq S^4)$ — универсальное расслоение над кватернионной проективной прямой, а r операция овеществления (не забывайте о некоммутативности кватернионов!) *(25 баллов)*.