НМУ, Математический анализ (2-й семестр). Листок 13. 22 февраля 2013 г.

Экстремум функции многих переменных и функциональная независимость

1. Пусть $df(x) = 0$. Может ли функция $f(x)$ иметь экстремум в точке $x = (x_1, \ldots, x_m)$, если гессиан $H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения?

2. Как изменяется гессиан $H_f(x)$ при замене декартовых координат на криволинейные?

3. Можно ли исследовать функцию на экстремум в криволинейных координатах по тому же правилу, что в декартовых?

4. Найдите все критические точки функций:

(а) $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$;

(б) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$.

Для каждой из критических точек определите, к какому типу она относится (локальный минимум, локальный максимум или седловая точка).

5. Докажите, что, если система гладких функций $f_i(x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, \ldots, n$, определенных в окрестности $U(x^0)$ точки $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$, такова, что матрица Якоби $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ имеет ранг n в каждой точке $x \in U(x^0)$, то система $f_1, \ldots, f_n$ функционально независима в $U(x^0)$. *Функциональная независимость означает, что если F – непрерывная функция и*

$$F(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \equiv 0,$$

то $F(y_1, \ldots, y_m) \equiv 0$ для всех x из некоторой окрестности точки $y^0 = (f_1(x^0), \ldots, f_n(x^0))$.

6. Докажите, что, если система гладких функций $f_i(x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, \ldots, n$ такова, что $\mathrm{rk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(x) = k < n$ в любой точке $x \in U(x^0)$ некоторой окрестности точки x^0, то найдется такая окрестность x^0, в которой некоторые $n - k$ функций системы выражаются через остальные.

7. Являются ли функционально независимыми стандартные симметрические многочлены от n переменных в окрестности точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$, если все x_i различны?

Пусть f, $\varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$ – функции, определенные в некоторой окрестности $U(x^0)$ точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $k < n$. Для того, чтобы точка x^0 являлась экстремумом функции $f(x)$ при условии, $\varphi_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, k$, необходимо, чтобы при некоторых значениях $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ выполнялись условия

$$\frac{\partial L(x^0)}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \varphi_i(x^0) = 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

где функцию $L(x) = f(x) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi_i(x)$ называют функцией Лагранжа, а параметры λ_i – множителями Лагранжа.

Пусть $f(x), \varphi_i(x) \in C^{(2)}(U(x^0), \mathbb{R})$, выполнены условия, написанные выше, ранг матрицы Якоби системы φ_i, $(i = 1, \ldots, k)$ в любой точке $U(x^0)$ равен k. Тогда, чтобы x^0 являлась точкой локального минимума (максимума) достаточно, чтобы квадратичная форма $\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) dx_i dx_j$ была положительно (отрицательно) определенной в пространстве, заданном соотношениями $d\varphi_i(x^0) = 0$, $i = 1, \ldots, k$.

8. Найдите условные экстремумы функции $f(x, y)$ относительно заданного уравнения связи:

(а) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$;

(б) $f(x, y) = x/a + y/b$, $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$.

9. Найдите расстояние между поверхностями $\frac{1}{96}x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $3x + 4y + 12z = 238$.

10. Найдите наибольший объем, который может иметь прямоугольный параллелепипед, вписанный:

(а) в полусферу радиуса R;

(б) в эллипсоид, полуоси которого равны a, b, c.

11. Может ли дифференцируемая функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ иметь ровно три критические точки – точку локального максимума, точку локального минимума и седловую точку?