

Экзамен

Задача 1. Какие абелевы группы получаются расширением группы $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ при помощи группы $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

Задача 2. Существует ли такое коммутативное целостное кольцо A и собственный ненулевой идеал \mathfrak{a} в нем, что $\mathfrak{a}^{-1} = A$?

Задача 3. Пусть главный идеал (π) в кольце целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ прост. Тогда $a^{|N\pi|} \equiv a \pmod{\pi}$ (где, как обычно, $N\pi = \pi\bar{\pi}$).

Задача 4. Число автоморфизмов конечного сепарабельного расширения полей делит степень этого расширения.

Задача 5. а) Найдите группу Галуа поля разложения многочлена $x^4 - 4$ над \mathbb{Q} .

б) Найдите в этом расширении индекс ветвления и степень каждого рационального простого.

Задача 6. Пусть f — наименьшее натуральное число, такое что $p^f \equiv 1 \pmod{q}$ ($p \neq q$ — нечетные простые). Тогда в кольце $\mathbb{Z}[\zeta_q]$ идеал (p) раскладывается в произведение $\frac{q-1}{f}$ простых идеалов.

На работу отводится 4 часа (240 минут). Разрешается пользоваться конспектами и другими учебными материалами. Удачи!