Дедекиндовы кольца

▷ Кольцо называется *дедекиндовым*, если оно нетерово, целозамкнутое и любой его простой идеал максимален. Кольцо дедекиндово тогда и только тогда, когда любой его идеал однозначно раскладывается в произведение простых. Кольцо целых числового поля дедекиндово.

Задача 9.0. Целостное кольцо главных идеалов дедекиндово.

Задача 9.1. Разложите идеал (7) в произведение простых идеалов в кольце целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

Задача 9.2. а) Локализация дедекиндова кольца — дедекиндово кольцо.

б) Для любого ненулевого простого идеала $\mathfrak{p}$ дедекиндова кольца A локализация $A_\mathfrak{p}$ — *кольцо дискретного нормирования* (локальное кольцо главных идеалов).

в) Если для всех ненулевых простых идеалов $\mathfrak{p}$ нетерова целостного кольца A локализация $A_\mathfrak{p}$ — кольцо дискретного нормирования, то A — дедекиндово кольцо.

Задача 9.3. а) Любой нетривиальный фактор дедекиндова кольца является кольцом главных идеалов.

б) Любой идеал дедекиндова кольца порожден не более чем двумя элементами.

Задача 9.4. Любой идеал кольца целых числового поля K — свободный $\mathbb{Z}$-модуль ранга $[K : \mathbb{Q}]$.

Задача 9.5. Если I — ненулевой идеал целого над A кольца B, то $I \cap A$ — ненулевой идеал кольца A.

▷ Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца $\mathcal{O}_K$. В силу предыдущей задачи $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)$. Порядок $\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(p)$ называется *индексом ветвления*, а степень расширения $[\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} : \mathbb{Z}/p]$ — *степенью* идеала $\mathfrak{p}$.

Задача 9.6. Найдите индексы ветвления и степени идеалов а) в $\mathbb{Z}[i]$; б) в $\mathbb{Z}[\omega]$.

Задача 9.7. Рациональное простое число p разветвлено в $\mathbb{Q}(\alpha)$ тогда и только тогда, когда у минимального многочлена есть кратные корни по модулю p.

Задача 9.8. Какие рациональные простые а) разветвлены, полностью расщепляются в $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$; б) разветвлены в $\mathbb{Q}(\zeta_n)$; в*) полностью расщепляются в $\mathbb{Q}(\zeta_n)$?