

Нормальные подгруппы

Задача 2.1. Пусть g — образующая циклической группы порядка n . Тогда g^k тоже является образующей тогда и только тогда, когда числа n и k взаимно просты.

▷ Индексом подгруппы H группы G называется число элементов множества G/H .

Задача 2.2. Подгруппа индекса 2 нормальна.

Задача 2.3. Пользуясь теоремой о гомоморфизме вычислите факторгруппы а) S_n/A_n ; б) \mathbb{C}/\mathbb{Z} ; в) \mathbb{C}^\times/μ_n (где μ_n — подгруппа корней степени n из единицы).

Евклидовы кольца

Задача 2.4. Если в евклидовом кольце $e(ab) = e(a)$, то элемент b обратим.

Задача 2.5. а) В кольце главных идеалов A элемент a прост тогда и только тогда, когда A/aA поле.

б) Идеал I в кольце A прост тогда и только тогда, когда кольцо A/I целостное.

в) Если в целостном кольце A идеал pA прост, то элемент p прост.

г) В факториальном кольце A элемент p прост тогда и только тогда, когда идеал pA прост.

Задача 2.6. а) Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ не факториально.

б) Приведите пример кольца A и простого элемента p в нем, для которых идеал pA не прост.

Задача 2.7. Найдите все простые идеалы и опишите соответствующие факторкольца для кольца $\mathbb{R}[x]$.

Задача 2.8. Кольцо а) $\mathbb{Z}[i]$ целых чисел Гаусса; б*) $\mathbb{Z}[\omega]$ целых чисел Эйлера евклидово.

Задача 2.9. Пусть p — нечетное целое простое число. Тогда следующие условия эквивалентны:

- а) (а1) число p является простым гауссовым;
- (а2) кольцо $\mathbb{F}_p[i]$ является полем;
- (а3) -1 не является квадратичным вычетом по модулю p .
- б) (б0) число p представимо в виде суммы двух квадратов;
- (б1) число p имеет вид $\pi\bar{\pi}$, где π — простое гауссово;
- (б2) кольцо $\mathbb{F}_p[i]$ изоморфно кольцу $\mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p$;
- (б3) -1 является квадратичным вычетом по модулю p .

Задача 2.10. -1 не является квадратичным вычетом по модулю p тогда и только тогда, когда $p = 4k + 3$.

Задача 2.11. а) Опишите все простые идеалы и соответствующие факторкольца в кольце $\mathbb{Z}[i]$. б) Какие целые числа представимы в виде суммы двух квадратов?

Задача 2.12*. а) Опишите все простые идеалы и соответствующие факторкольца в кольце $\mathbb{Z}[\omega]$. б) Какие целые числа представимы в виде $x^2 - xy + y^2$?

