Вторая теорема Гёделя о неполноте утверждает, что теория, включающая арифметику и непротиворечивая, не просто не может доказать какое-то истинное утверждение, а не может доказать конкретное утверждение о собственной непротиворечивости.

Основная идея доказательства в том, что из доказательства утверждения, утверждающего свою непротиворечивость, следует несуществование этого самого доказательства (а объект, который можно предъявить, доказуемо существует). Если бы непротиворечивость была доказуема, сведение существования доказательства к противоречию доказывало бы несуществование доказательства. Но оно недоказуемо по первой теореме Гёделя о неполноте.

Таким образом, только противоречивые теории, содержащие арифметику, могут доказать свою непротиворечивость. Никакое добавление аксиом не поможет.

Кроме того, как мы видели раньше, арифметики без индукции --- даже хотя в арифметике Пеано для них можно доказать теорему Гёделя --- иногда не могут даже доказать непротиворечивость исчисления высказываний.

Невозможность доказать непротиворечивость арифметики Пеано в ней самой означает, что нельзя выделить ``совсем безопасное подмножество'' арифметики и в нём доказать непротиворечивость всей теории.

Будем верить, что арифметика Пеано PA непротиворечива.

Так как ни непротиворечивость арифметики Пеано, ни противоречивость арифметики Пеано недоказуемы, можно представить себе модель арифметики Пеано с дополнительной аксиомой ``арифметика Пеано противоречива''. Модель будет удовлетворять аксиомам арифметики, но при попытке использовать её в качестве натуральных чисел для нумерации формул всегда будет находиться доказательство противоречия в арифметике Пеано.

Заметим, что если у нас в арифметике есть операция добавления единицы, то любая модель должна включать все натуральные числа метатеории --- и наследовать все её проблемы.

Есть два радикальных способа уйти от этой проблемы.

Один состоит в том, чтобы сказать, что больших натуральных чисел вообще нет. Или сказать, что они есть, но неправильные. Например, сказать, что сложение определено не на всех натуральных числах, но на тех, которые мы можем предъявить, оно определено (реализовать это можно через индуктивные определения, не утверждая, что они применимы для всех натуральных чисел). Ещё более радикальный вариант --- это сказать, что больших натуральных чисел нет, но к каждому числу можно прибавить 1. Эта теория будет классически противоречива, но при некоторых ограничениях на способы записи можно добиться того, что никакое доказательство противоречия не будет помещаться в видимую часть Вселенной.

Другой состоит в применении логик, разрешающих противоречия и не разрешающих вывод чего угодно из противоречия. Такие логики, например, ценны при попытках делать выводы на основе данных, собранных из большого количества независимых источников. Например, одна из них, логика парадокса, приписывает каждому высказыванию одно из двух или оба истинностных значения, и реализует связки по принципу всех возможных результатов. В ней те же тавтологии, что и в классической логике, так как все классические оценки реализуются, а добавление вариантов истинности не может устранить (возможную) истинность формулы. С другой стороны, если A может быть и истинно и ложно,а B заведомо ложно, то $A \to B$ может быть и истинно и ложно и правило modus ponens не работает.