Арифметика. Аксиомы Пеано.

В прошлый раз мы определили в теории множеств множество натуральных чисел, но если мы хотим изучать натуральные числа, то можно обойтись и понятиями, не порождающими несчётные множества.

Мы хотим, чтобы наши понятия о натуральных числах --- тех самых, которыми мы нумеруем формулы в выводе --- были бы моделью теории. В соответствии с этим, мы будем называть объекты ``натуральными числами''.

В сигнатуру, разумеется, будет входить равенство. Для него будут аксиомы равенства как отношения эквивалентности, и аксиомы, что замена аргументов на равные не меняет значение предиката и сохраняет значение функций с точностью до равенства. Мы, разумеется, будем считать, что равенство является совпадением объектов, хотя сформулировать это в языке первого порядка и невозможно. Модели, в которых равенство интерпретировано как совпадение называются нормальными.

В сигнатуре у нас будут константный символ 0 и функциональный символ S.

Их описывают следующие аксиомы:

$S(x) \neq 0$, $S(x) = S(y) \to x = y$

Основа арифметики Пеано --- схема индукции. Для любой формулы Φ с параметром x аксиомой является утверждение: $(\Phi(0) \wedge (\forall k : (\Phi(k) \to \Phi(k{+}1)))) \to \forall k \Phi(k)$.

Это можно записать в более слабом виде --- как правило индукции: $\frac{\Phi(0) \qquad \Phi(k) \to \Phi(k+1)}{Phi(k)}$

Аксиома индукции, конечно, может быть применена вместо правила (с помощью двукратного modus ponens), но правила недостаточно, чтобы доказать аксиому индукции.

По индукции легко доказать, что для любой заданной формулы либо есть минимальное число, ей не удовлетворяющее, либо ей удовлетворяют все натуральные числа.

Для сложения и умножения аксиомы дают индуктивное определение:

$0 + a = a$

$S(a) + b = S(a + b)$

$0 \times a = 0$

$S(a) \times b = b + (a \times b)$

По индукции можно доказать, что каждое число равно нулю, либо имеет предыдущее:

$\Phi(x) : ((x = 0) \vee \exists y : x = S(y))$

$\Phi(0) : 0 = 0$

$\Phi(k) \to \Phi(S(k)) :$

$((k = 0) \vee \exists y : k = S(y)) \to ((S(k) = 0) \vee \exists y : S(k) = S(y))$

Сначала заметим, что $S(k) = S(k)$. Тогда, по аксиоме введения квантора существования мы можем заметить, что $(S(k) = S(y))[k/y]$ --- это $S(k) = S(k)$, значит,

$(S(k) = S(y))[k/y] \to \exists y : S(k) = S(y)$ имеет вид $S(k) = S(k) \to \exists y : S(k) = S(y)$. Далее можно воспользоваться логическими тавтологиями.

По индукции можно доказать также утверждения о коммутативности и ассоциативности сложения и умножения, а также распределительное свойство умножения относительно сложения.

Например, если бы сложение не было коммутативно, то было бы минимальное число a, коммутирующее не со всеми числами, и минимальное b, не коммутирующее с a.

Если бы b было равно 0, то $a + 0 \neq a$. Но тогда либо $a = 0$, либо $a = S(k)$, $a + 0 = S(k) + 0 = S(k + 0) = S(k) = a$. Противоречие. Значит, $b = S(l)$. Если $a = 0$, то аналогично $0 + b = b + 0$. Иначе $S(k) + S(l) = S(k + S(l)) = S(S(l) + k) = S(S(l + k)) = S(S(k + l)) = S(S(k) + l) = S(l + S(k)) = S(l) + S(k)$.