Определялось исчисление предикатов перовго порядка, его аксиомы и семантика. Учебник Верещагина и Шеня, разделы 3.1, 3.2, 4.1, 4.2.

Посылка в правилах Бернайса позволит нам позже доказать лемму о дедукции по замкнутым посылкам.

Важно не забывать о том, чтобы переменная, по которой добавляется квантор, не была параметром посылки/заключения!

Действительно, для вещественных чисел $x > 2 \to x > 1$ верно, но $(\exists x : x > 2) \to x > 1$ и $x > 2 \to \forall x : x > 1$ — явная неправда.

Неудачно, что в формальном определении семантики формулы с кванторами смысл квантора существования выражается через наше интуитивное представление о существовании. С одной стороны, это неизбежно если мы хотим представить формальный вывод как формализацию интуитивных рассуждений; с другой стороны, построить формальную систему вывода совсем без опоры на наши интуитивные представления не удастся никогда.

Действительно, формальный вывод — это последовательность формул. Но определить последовательность лучше, чем отображение из начального отрезка натуральных чисел во множество гипотетически мыслимых членов последовательности не удаётся. Потом мы узнаем, что формализовать в достаточнной степени натуральные числа невозможно. Как иллюстрацию проблемы приведём следующую формализацию: натуральные числа — это то, что можно сравнивать, складывать и умножать, с соблюдением обычных правил монотонности, коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности; кроме того, из каждого числа, кроме 0, можно вычесть единицу.

Если мы воспользуемся таким определением натуральных чисел, мы можем обнаружить, что многочлены с целыми коэффициентами и неотрицательным старшим коэффициентом являются альтернативной моделью натуральных чисел.

Приведём следующий «вывод» конечной (с точки зрения новых натуральных чисел) длины x. Для простоты добавим в исчисление высказываний символы $\top, \bot$ (синтаксическая истина и синтаксическая ложь) с аксиомами $\top$ и $\not\bot$.

$1. \top (ax)$

$2. \top \to (\top \to \top)(ax1)$

$3. \top \to \top (MP1, 2)$

$4. \top (MP1, 3)$

$5. \top \to (\top \to \top)(ax1)$

$6. \top \to \top (MP4, 5)$

$7. \top (MP4, 6)$

$\dots$

$x - 3. \bot (MPx - 6, x - 4)$

$x - 2. \bot \to (\bot \to \bot)(ax1)$

$x - 1. \bot \to \bot (MPx - 3, x - 2)$

$x. \bot (MPx - 3, x - 1)$

Неважно, как получен этот вывод; это предъявленная последовательность формул, в которой каждая формула обоснована и в которой в конце стоит синтаксически ложное утверждение. Оказывается, что избавиться от риска противоречий такого вида формальными методами нельзя.