См. также конспект Пентуса по исчислению Ламбека:
http://lpcs.math.msu.su/ pentus/spec2005w.htm

Определим так называемое исчисление Ламбека. См. источник, глава 2. Из чего состоят выводимые объекты:

Есть примитивные типы. Это некоторое конечное или счётное множество, мы будем пользоваться как примером набором $\{n, np, s\}$.

Каждый тип либо является примитивным, либо получен из двух типов, A и B как $A \cdot B$, A/B или $B\backslash A$.

Утверждением, то есть объектом, который может быть выводим или невыводим, называем утверждение вида $A \to B$, где A и B — типы.

Аксиомой будет являться любое утверждение вида $A \to A$. Кроме того, наложим требование ассоциативности умножения, то есть аксиомы $(A \cdot B) \cdot C \to A \cdot (B \cdot C)$ и $A \cdot (B \cdot C) \to (A \cdot B) \cdot C$.

Выводом будет называться последовательность утверждений, в которой каждое либо аксиома, либо получено из ранее полученных по одному из следующих правил:

$\frac{A \cdot C \to B}{C \to A\backslash B}$ $\frac{C \to A\backslash B}{A \cdot C \to B}$ (правила левого деления)

$\frac{C \cdot A \to B}{C \to B/A}$ $\frac{C \to B/A}{C \cdot A \to B}$ (правила правого деления)

$\frac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C}$ (правило сечения)

Приведём пример вывода. Если уж у нас умножение ассоциативно, естественно было бы ожидать того же от делений, а именно $B\backslash(A/C) \to (B\backslash A)/C$.

Доказательство будем записывать с конца: посмотрим, из чего бы это могло следовать.

$B\backslash(A/C) \to (B\backslash A)/C$.

Раскроем, например, правую часть.

$(B\backslash(A/C)) \cdot C \to B\backslash A$.

$B \cdot ((B\backslash(A/C)) \cdot C) \to A$.

Чтобы получить что-то более удобное, хочется воспользоваться аксиомой ассоциативности.

$B \cdot ((B\backslash(A/C)) \cdot C) \to (B \cdot ((B\backslash(A/C))) \cdot C$.

Но чтобы её включить в доказательство нам потребуется сечение вида

$$\frac{B\cdot((B\backslash(A/C))\cdot C)\to(B\cdot((B\backslash(A/C)))\cdot C \qquad (B\cdot((B\backslash(A/C)))\cdot C\to A}{B\cdot((B\backslash(A/C))\cdot C)\to A}$$

Осталось доказать $(B \cdot ((B\backslash(A/C))) \cdot C \to A$

Её можно получить из $B \cdot ((B\backslash(A/C)) \to A/C$, что, в свою очередь, выводится из $B\backslash(A/C) \to B\backslash(A/C)$. Но это уже аксиома.

Упражнение 1. Запишите вывод по правилам вывода, начинающийся с аксиом, который описан в этом рассуждении.

Посмотрев на правила вывода, скажем откуда возникло это исчисление. См. также
http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/gjaeger/lehre/cg_ss00/lambek/lambek58.html

Это исчисление появилось как попытка формального описания структуры корректного предложения. Например, рассмотрим предложение «A quick brown fox jumped over the lazy dog».

Мы хотим приписать всем словам типы, исходя из примитивных типов s (sentence, предложение), n (noun, существительное) и np (name phrase, именная группа) так, что произведение всех типов в предложении можно будет подставить в левую часть утверждения, в правой части которого тип s.

Оптимистично припишем тип n словам ``fox'' и ``dog''. Именной группой, то есть группой слов, которую можно использовать как подлежащее, должно оказаться словосочетание ``A quick brown fox'', а также ``the lazy dog''. Добавление прилагательных в первом приближении ничего не меняет с точки зрения употребления словосочетание, поэтому припишем им тип n/n. Тип np хочется получить, когда у нас добавился, наконец, артикль. Припишем поэтому ``a'' и ``the'' тип np/n. Наша единственная надежда получить для целого предложения тип s — приписать глаголу тип $np\backslash s/np$ (скобки, как мы уже проверяли, не важны).

В такой интерпретации читать $\to$ естественно как ``является частным случаем''.

Переставляя слова в предложении, мы можем получить несколько предложений и разную абракадабру; для предложений и только для них (так как случай слишком простой для правдоподобия) удастся вывести, что произведение всех типов в предложении является частным случаем s.

Опишем теперь математические объекты, утверждения про которые можно доказывать в исчислении Ламбека. См. также конспект Пентуса, главу 1.

Полугруппой называется произвольное множество, на котором определена ассоциативная операция ``умножения''. Упорядоченной полугруппой называется полугруппа, на которой задано отношение частичного порядка, такое что умножение монотонно возрастает по каждому аргументу.

Правым частным двух элементов упорядоченной полугруппы называется такой элемент $d = a/b$, что $c \leqslant d \Leftrightarrow c \cdot b \leqslant a$. Аналогично, $d = b\backslash a$, если $c \leqslant d \Leftrightarrow b \cdot c \leqslant a$. Упорядоченная полугруппа называется полугруппой с делением, если для каждых двух её элементов есть левое и правое частное.

Покажем сначала, как строить примеры полугрупп с делением. Пусть есть произвольная упорядоченная полугруппа G. Построим на её основе полугруппу с делением. Элементами построенной полугруппы с делением будут все замкнутые вниз подмножества G, то есть такие $A \subset G$, что $x \in A, y \leqslant x \Rightarrow y \in A$. В качестве отношения порядка будем использовать отношение ``быть подмножеством'': $A \leqslant B \Leftrightarrow A \subseteq B$. Произведением двух элементов G будем называть замыкание вниз их поэлементного произведения: $z \in A \cdot B \Leftrightarrow \exists x \in A, y \in B : z \leqslant x \cdot y$.

Докажем теперь существование частных. Для определённости, будем доказывать существование правого частного. Его можно задать следующим образом: $A/B = \{z \in G \mid \forall x \in G, b \in B x \leqslant z \Rightarrow x \cdot b \in A\}$. Докажем, что это правое частное. Если $\leqslant D$, то любой элемент $c \in C$ является и элементом D, то есть для него верно условие включения во множество, но тогда возьмём $x = c$ и получим: $\forall b \in B c \leqslant c \Rightarrow x \cdot b \in A$, что означает, что все элементы $C \cdot B$ лежат в A (те, которые получены при замыкании вниз, есть и в A, так как оно тоже замкнуто вниз). Если же $C \nleqslant D$, то в C есть элемент, отброшенный по условию, то есть $\exists c \in C, x \in G, b \in B : x \leqslant c, x \cdot b \notin A$. Но тогда $C \cdot B \notin A$.

Теперь можно заметить, что если рассматривать в исчислении Ламбека $\to$ как замену $\leqslant$, то все аксиомы — верные неравенства, а все правила вывода — корректные переходы. Исчисление Ламбека, несмотря на свою странность, может доказывать теоремы о полугруппах с делением. Это же значит, что контрпример в полугруппах с делением позволяет доказать невыводимость в исчислении Ламбека.