Обозначения и справочный материал

• $\|\cdot\|$ — норма (п. 1.b).

• $+\infty$, $-\infty$ — символы «бесконечности» или дедекиндовы сечения, нижними классами которых служат соответственно $\mathbb{Q}$ и пустое множество. Символы бесконечности обладают следующими арифметическими свойствами:

$$-\infty < 0 < +\infty,$$

$+$	$-\infty$	y	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	неопр.
x	$-\infty$	$x+y$	$+\infty$
$+\infty$	неопр.	$+\infty$	$+\infty$

$-$	$-\infty$	y	$+\infty$
$-\infty$	неопр.	$-\infty$	$-\infty$
x	$+\infty$	$x-y$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	неопр.

$$+\infty\cdot x = x\cdot(+\infty) = +\infty \text{ и } -\infty\cdot x = x\cdot(-\infty) = -\infty \text{ при } x>0 \text{ или } x=+\infty,$$

$$+\infty\cdot x = x\cdot(+\infty) = -\infty \text{ и } -\infty\cdot x = x\cdot(-\infty) = +\infty \text{ при } x<0 \text{ или } x=-\infty,$$

$$x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0,$$

$$+\infty/(+\infty), -\infty/(+\infty), +\infty/(-\infty), -\infty/(-\infty), +\infty\cdot 0, -\infty\cdot 0 \text{ не определены.}$$

• $C(S;V)$ — пространство непрерывных функций $S\to V$, где $(V,\|\cdot\|_V)$ — нормированное пространство, с нормой $\|f\|_\infty := \sup\{\,\|f(x)\|_V : x\in S\,\}$; для числовых функций на отрезке используется сокращенное обозначение $C([a,b];\mathbb{R}) =: C[a,b]$ (п. 1.5).

• $\mathbb{Q}$ — множество вещественных рациональных чисел.

• $\mathbb{R}$ — числовая ось; $\mathbb{R}^{\geqslant 0} := \{\,x\in\mathbb{R}\colon x\geqslant 0\,\}$ — неотрицательная полуось.

• $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, $\overline{\mathbb{R}}^{\geqslant 0} := \mathbb{R}^{\geqslant 0}\cup\{+\infty\}$ — порядковые пополнения числовой оси и неотрицательной полуоси.

• $\rho(\cdot,\cdot)$ — метрика (п. 1.d).

• Если A — множество в метрическом пространстве X с метрикой ρ, его *диаметр* определяется как $\operatorname{diam} A := \sup\{\,\rho(x,y)\colon x,y\in X\,\}$.

• V, W — векторные пространства (п. 1.a), как правило рассматриваемые с какой-либо нормой (п. 1.b): $(V,\|\cdot\|)$.

• $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbb{Z}^{\geqslant 0} := \{\,n\in\mathbb{Z}\colon n\geqslant 0\,\}$ — множество натуральных чисел.

• Характеристическая функция множества A (п. 6.d): $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x\in A;\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$

• **Неравенство Минковского**: для любых $(x_i),(y_i)\in\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 1$, $p\geqslant 1$

$$\Bigl(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i+y_i|^p\Bigr)^{1/p} \leqslant \Bigl(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|^p\Bigr)^{1/p} + \Bigl(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |y_i|^p\Bigr)^{1/p}.$$

• **Неравенство Гельдера**: для любых $(x_i),(y_i)\in\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 1$, $p,q>1$, $p^{-1}+q^{-1}=1$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i y_i| \leqslant \Bigl(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|^p\Bigr)^{1/p} \Bigl(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |y_i|^p\Bigr)^{1/q}.$$

Определения и утверждения, доказываемые на лекциях, нумеруются двойным индексом вида ¶N.n, где n — буквенный индекс соответствующего высказывания в лекции N.

Упражнения нумеруются двойным индексом вида $N.n$, где n — номер соответствующего упражнения в лекции N. Если упражнение содержит утверждение, его надо понимать как упражнение на доказательство.

1. Нормированные векторные пространства

Несмотря на то, что анализ в $\mathbb{R}^n$ отчасти уже изучался в осеннем семестре, сначала мы вернемся к его исходному пункту — векторному пространству — и пройдем часть знакомого пути второй раз, но с более общей точки зрения теории нормированных векторных пространств.

¶1.a. *Векторным пространством* над полем $\mathbb{R}$ называется коммутативная группа V (с аддитивной записью), снабженная операцией умножения на скаляры, т. е. отображением $(\alpha \in \mathbb{R}, x \in V) \mapsto \alpha x \in V$, которое для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$ удовлетворяет следующим условиям: (i) $1x = x$; (ii) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$; ($iii$) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$; ($iv$) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Нетрудно показать, что $\alpha x = 0$ в V тогда и только тогда, когда либо $\alpha = 0$ в $\mathbb{R}$, либо $x = 0$ в V, а также что $-x = (-1)x$ для всех $x \in V$.

В этих формулах символы $+$ и 0 употребляются в двух разных смыслах (каких?).

Все следующие построения можно проводить и над полем $\mathbb{C}$ (проследите это!). Приглашаем читателя проверять, проходят ли они над его любимым полем, если оно отличается от $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

¶1.b. *Нормой* на векторном пространстве V называется функция $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, которая для любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$ удовлетворяет следующим условиям: (i) *невырожденность*: $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$; (ii) *однородность* первого порядка: $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$; ($iii$) *субаддитивность*: $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Функция, обладающая свойствами (ii) и (iii), но не (i), называется *полунормой.*

¶1.c. Пара $(V, \|\cdot\|)$ называется (вещественным) *нормированным пространством.*

Норма — по существу то же, что метрика, согласованная с линейной структурой пространства.

¶1.d. *Метрическим пространством* называется множество X, снабженное *метрикой* — функцией $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, которая для любых $x, y, z \in X$ удовлетворяет следующим условиям: (i) *симметрия*: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$; (ii) *положительность*: $\rho(x, y) \geqslant 0$ и равенство достигается лишь при $x = y$; (iii) *неравенство треугольника*: $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.

¶1.e. Выражение $\rho(x, y) := \|y - x\|$ корректно определяет метрику на нормированном пространстве V. Обратно, выражение $\|x\| := \rho(x, 0)$ корректно определяет норму на векторном пространстве V, снабженном метрикой ρ, если метрика *однородна*, т. е. для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in V$ выполнены условия $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$ и $\rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\,\rho(x, y)$.

¶1.f. *Единичным шаром* в нормированном пространстве V называется множество $B := \{\, x \in V\colon \|x\| < 1 \,\}$.

¶1.g. Норма порождает на векторном пространстве топологию, в которой множество считается *открытым*, если наряду с любой своей точкой x оно содержит ее *шаровую окрестность* $B_r(x) := x + rB$ для некоторого $r > 0$. Пустое множество считается открытым. Дополнения открытых множеств считаются *замкнутыми.*

1.1. В данной топологии функция $\|\cdot\|$ непрерывна.

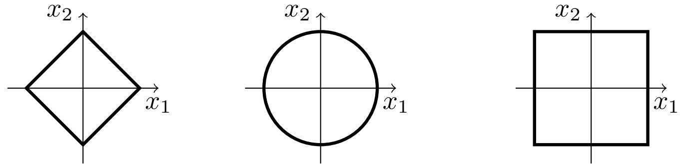
¶1.h. Пусть A — множество в нормированном пространстве V. Тогда его *замыканием* $\bar{A}$ называется наименьшее замкнутое множество, содержащее A, *внутренностью* A° — наибольшее открытое множество, содержащееся в A, а *границей* ∂A — разность $\bar{A} \setminus A^\circ$.

¶1.i. Единичный шар B в нормированном пространстве V является *выпуклым* (если $x, y \in B$ и $0 < \lambda < 1$, то $\lambda x + (1 - \lambda) y \in B$) и *симметричным* (если $x \in B$ и $|\mu| = 1$, то $\mu x \in B$). Единичный шар открыт в V относительно топологии, порожденной нормой.

¶1.j. Пусть K — симметричное выпуклое множество в векторном пространстве V. Определим функцию $\|\cdot\|_K\colon V \to \mathbb{R}^{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}$ выражением $\|x\|_K := \inf\{\, r > 0\colon x \in rK \,\}$.

¶1.k. Если множество K является *поглощающим*, т. е. для всякого $x \in V$ найдется такое достаточно большое $r > 0$, что $x \in r'K$ при $r' \geqslant r$, то функция $\|\cdot\|_K$ всюду конечна. Если K не содержит бесконечных лучей, то $\|\cdot\|_K$ является нормой на V с единичным шаром $B_K = \{\, x \in V\colon \|x\|_K < 1 \,\}$, причем $B_K \subset K \subset \bar{B}_K$.

¶1.l. Примеры норм и единичных шаров в $\mathbb{R}^2$: $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$ при $p \geqslant 1$;



$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|; \quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Нормы, для которых единичные шары являются выпуклыми многогранниками, принято называть *кристаллическими.*

1.2. Будет ли функция $\|\cdot\|_p$ из предыдущего пункта определять норму при $0 < p < 1$?

1.3. Покажите, что конечномерное нормированное пространство $(V, \|\cdot\|)$ над $\mathbb{R}$ является евклидовым тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in V$ выполнено тождество параллелограмма: $\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. Справедлив ли аналогичный результат для нормированных пространств над $\mathbb{C}$?

1.4. Покажите, что для любых двух норм $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ на $\mathbb{R}^d$ существуют положительные константы m, M такие, что $m\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant M\|x\|$ для всех x. Выведите отсюда, что топологии, определяемые на $\mathbb{R}^d$ всеми возможными нормами, эквивалентны друг другу. В частности покажите, что сходимость последовательности в $\mathbb{R}^d$ с произвольной нормой эквивалентна сходимости последовательностей, образованных каждой из координат.

1.5. Пространство всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ со значениями в $\mathbb{R}$ обозначается $C([0,1];\mathbb{R})$ или коротко $C[0,1]$. (a) Покажите, что следующие функционалы являются нормами на $C[0,1]$:

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t; \quad \|f\|_2 := \Big(\int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}; \quad \|f\|_\infty := \sup\{\, |f(t)| \colon 0 \leqslant t \leqslant 1\,\}.$$

(b) Приведите пример фундаментальной последовательности функций f_n в пространстве $C[0,1]$ с нормой $\|\cdot\|_1$, которая не имеет предела. Можно ли привести аналогичные примеры для норм $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$?

¶1.m. Нормированное пространство называется *банаховым*, если оно полно, т. е. любая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Польский математик Стефан Банах (Краков, 1892 — Львов, август 1945) — выпускник Львовского политехнического института, один из создателей современного функционального анализа.

1.6. Нормированное пространство является банаховым тогда и только тогда, когда в нем всякая последовательность замкнутых шаров $\bar{B}_{r_1}(x_1) \supset \bar{B}_{r_2}(x_2) \supset \dots$, *радиусы которых стремятся к нулю*, имеет непустое пересечение. Можно ли гарантировать, что пересечение будет по-прежнему непустым, если снять условие, напечатанное курсивом?

¶1.n. Пусть V — нормированное пространство над $\mathbb{R}$ с единичным шаром B. *Алгебраически сопряженным* к нему называется векторное пространство, образованное линейными функционалами $V \to \mathbb{R}$ с операциями поточечного сложения и умножения на скаляры.

¶1.o. Для линейного функционала ℓ положим $\|\ell\|^* := \sup\{\, \ell(x) \colon x \in B\,\}$.

¶1.p. Линейный функционал ℓ непрерывен тогда и только тогда, когда $\|\ell\|^* < \infty$.

¶1.q. Непрерывные функционалы образуют банахово векторное пространство V^*, нормированное функцией $\|\cdot\|^*$.

1.7. В случае конечномерного векторного пространства $V = \mathbb{R}^d$ запишите явные выражения для функций $\|\cdot\|_p^*$ при $p > 1$ и в частности для $\|\cdot\|_2$, а также для $\|\cdot\|_1^*$ и $\|\cdot\|_\infty^*$.

¶1.r. Нормы $\|\cdot\|_p$, $p \geqslant 1$, и $\|\cdot\|_\infty$ можно определить аналогично п. 1.l и для бесконечных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ при условии, что сходятся соответствующие ряды (ср. также п. 1.5). Соответствующие пространства обозначаются $l_p := \{\, x = (x_1, x_2, \dots) \colon \|x\|_p < \infty\,\}$ и $l_\infty := \{\, x = (x_1, x_2, \dots) \colon \|x\|_\infty < \infty\,\}$.

1.8. Покажите, что пространства l_p, $p \geqslant 1$, и l_∞ банаховы, что $(l_p)^* = l_q$ при подходящем $q > 1$, если $p > 1$, и что $(l_1)^* = l_\infty$.

1.9. Пусть c_0 — пространство всех сходящихся последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$. Покажите, что это пространство банахово относительно нормы $\|x\|_\infty$, а также что $(c_0)^* = l_1$.

1.10. Пусть $(V, \|\cdot\|_V)$ и $(W, \|\cdot\|_W)$ — нормированные пространства. Линейный оператор $A \colon V \to W$ непрерывен тогда и только тогда, когда $\|A\|_{V,W} := \sup\{\, \|Ax\|_W \colon \|x\|_V < 1\,\} < \infty$. Непрерывные линейные операторы образуют векторное пространство $L(V, W)$, нормированное функцией $\|\cdot\|_{V,W}$.

1.11. Линейные операторы $G, H \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ заданы матрицами $G = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $H = \begin{pmatrix} 1/2 & 3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Найдите их нормы, если $\mathbb{R}^2$ снабжено нормами $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ или $\|\cdot\|_\infty$. Существует ли на $\mathbb{R}^2$ норма, относительно которой оператор H является сжимающим?

1.12. В нормированном пространстве $(V, \|\cdot\|)$ положим $\|x\|^{**} := \sup\{\, \ell(x) \colon \|\ell\|^* < 1\,\}$. Покажите, что $\|x\|^{**} \leqslant \|x\|$ для всех $x \in V$.

1.13. Имеется естественное отображение $\pi \colon V \to V^{**}$ пространства V в его «второе сопряженное»: $\pi(x)(\ell) := \ell(x)$. Если $\pi(V) = V^{**}$, пространство V называется *рефлексивным*. Пространство $\mathbb{R}^d$ с любой нормой рефлексивно. Пространства l_p при $p > 1$ рефлексивны. Пространство c_0 не рефлексивно.

2. Непрерывные функции

Напомним некоторые определения и факты из первой части курса (пп. 2.a–2.d).

¶2.a. Множество K в банаховом пространстве называется *компактным*, если из каждого счетного покрытия множества K открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Каждое бесконечное подмножество компактного множества K имеет предельную точку.

2.1. Подмножество K банахова пространства V компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное подмножество («*ε-сеть*») $N(K, \varepsilon)$, в котором для любого $x \in K$ имеется $x_i \in N(K, \varepsilon)$, для которого $\|x - x_i\| \leqslant \varepsilon$.

2.2. Пусть $|N^*(K, \varepsilon)|$ — число точек в *наименьшей* ε-сети на компакте K. Какой геометрический смысл можно придать пределу $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \log |N^*(K, \varepsilon)| / |\log \varepsilon|$ (если он существует)?

2.3. (a) Замкнутый отрезок $[a, b]$ вещественной прямой компактен; (b) замкнутое ограниченное множество конечномерного векторного пространства $\mathbb{R}^d$ компактно; (c) единичный шар B в гильбертовом пространстве l_2 — замкнутое, ограниченное, но не компактное множество; (d) «Гильбертов кирпич» $\{\, (x_1, x_2, \dots) \in l_2 \colon |x_i| \leqslant 2^{-i}, i = 1, 2, \dots \,\}$ компактен.

2.4. Пусть S — подмножество банахова пространства V. Говорят, что множество $O \subset S$ *открыто в S*, если $O = U \cap S$, где U — множество, открытое в V. Множество K, компактное в V, будет компактно и в любом $S \subset V$, если $K \subset S$.

Таким образом, в отличие от открытости или замкнутости, компактность — это внутреннее свойство множества, не зависящее от объемлющего топологического пространства.

¶2.b. Числовая функция f, заданная на подмножестве S банахова пространства V, *непрерывна в точке* $x \in S$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$, что $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, как только $\|y - x\| < \delta$. Функция, непрерывная в каждой точке множества S, называется *непрерывной на S*. Если непрерывная на S функция такова, что число $\delta = \delta(\varepsilon)$ в определении выше может быть выбрано независимо от x, она называется *равномерно непрерывной* на S.

¶2.c. Теорема Кантора. Непрерывная функция $f \colon K \to \mathbb{R}$, определенная на компактном множестве $K \subset V$, равномерно непрерывна на K.

¶2.d. Образ компактного множества при непрерывном отображении компактен. В частности, если $f \colon K \to \mathbb{R}$ — непрерывная числовая функция на линейно связном компактном подмножестве, то $f(K) = [m, M]$, где m — минимальное, а M — максимальное значение f на K, т. е. непрерывная функция на компактном множестве достигает своих точных нижней и верхней грани.

Часто оказывается полезным и следующий ослабленный вариант последнего утверждения.

¶2.e. *Надграфиком* функции $f \colon V \to \mathbb{R}$ называется множество $\operatorname{epi} f := \{\, (x, y) \in V \times \mathbb{R} \colon y \geqslant f(x) \,\}$. Функция f называется *полунепрерывной снизу*, если ее надграфик замкнут в $V \times \mathbb{R}$ относительно топологии, образованной декартовыми произведениями всевозможных открытых множеств в V и $\mathbb{R}$. В частности, все множества уровня $S_h := \{\, x \in V \colon f(x) \leqslant h \,\}$ полунепрерывной функции f замкнуты. Конечная полунепрерывная снизу функция на компактном множестве ограничена снизу и достигает своей точной нижней грани.

Непрерывные функции на конечномерном векторном пространстве или его компактном подмножестве сами образуют бесконечномерное векторное пространство, и возникает задача снабдить его подходящей топологией. При этом иногда удобно рассматривать вопрос о сходимости не последовательности функций $f_n(\cdot) \to f(\cdot)$, а ряда, составленного из функций: $\sum_{n \geqslant 1} \varphi_n(\cdot) \to f(\cdot)$. Эти две постановки сводятся друг к другу, если положить $f_n := \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \varphi_n$, $\varphi_n = f_n - f_{n-1}$ ($f_0 \equiv 0$).

¶2.f. Последовательность функций $f_n \colon S \to \mathbb{R}$ сходится к f на множестве $S \subset V$ *поточечно*, если для любого $x \in S$ существует предел $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

¶2.g. Контрпример: $\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} (\cos m!\, \pi x)^{2n} = \begin{cases} 0, & x \text{ иррационально}, \\ 1, & x \text{ рационально}. \end{cases}$

¶2.h. Последовательность функций $f_n \colon S \to \mathbb{R}$ сходится к f на множестве $S \subset V$ *равномерно*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $N = N(\varepsilon)$, что $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in S$, как только $n > N$.

¶2.i. Равномерно сходящаяся на S последовательность функций $f_n \to f$ сходится и поточечно. Если f_n непрерывны, непрерывна и предельная функция f.

Итак, равномерная сходимость не выводит за пределы класса непрерывных функций. Вводя норму $\|f\|_\infty = \sup\{\, |f(x)| \colon x \in S \,\}$, ее можно понимать как сходимость по норме в нормированном пространстве $(C(S; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, или коротко $C(S)$.

2.5. Доказать, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}$ пространство $C(K)$ банахово. Верно ли это для действительных функций на произвольном компактном топологическом пространстве?

¶2.j. Контрпример: $f_n = nx(1-x^2)^n \to 0$ на $[0,1]$ поточечно, но $\lim \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \neq 0$.

¶2.k. Если $f_n \to f$ равномерно на $[a,b]$, то существует предел $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2.6. Назовем функционал $\ell\colon C(K) \to \mathbb{R}$ *положительным*, если $\ell(f) \geqslant 0$ для любой неотрицательной функции из $C(K)$. Докажите, что $\|\ell\|_\infty^* = \ell(\mathbf{1})$, где $\mathbf{1}(x) \equiv 1$ для всех $x \in K$, т. е. функционал ℓ непрерывен.

¶2.l. Контрпример: если $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$, то $f_n \to 0$ равномерно на $\mathbb{R}$, но $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx \to +\infty$ при $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

¶2.m. Если последовательность непрерывно дифференцируемых функций f_n на $[a,b]$ такова, что $f_n(x^*) \to f(x^*)$ для некоторого $a \leqslant x^* \leqslant b$, и $f_n' \to g$ равномерно на $[a,b]$, то $f_n \to f$ равномерно на $[a,b]$, функция f дифференцируема и $f' = g$.

Получим критерий существования у последовательности непрерывных функций предельных точек в смысле равномерной сходимости.

¶2.n. Последовательность непрерывных функций $f_n\colon S \to \mathbb{R}$, определенных на подмножестве S нормированного пространства V, называется *равномерно ограниченной* на S, если она ограничена по норме в $C(S)$. Эта последовательность называется *равностепенно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ для любого n, как только $\|x - y\| < \delta$.

¶2.o. Теорема Арцела–Асколи. Пусть $K \subset V$ — компактное множество. Тогда, если $f_n \to f$ равномерно на K, то последовательность $\{f_n\}$ равностепенно непрерывна на K. Если последовательность $\{f_n\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, из нее можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.

¶2.p. Теорема Вейерштрасса. Для любой функции $f \in C[0,1]$ существует последовательность многочленов $P_n(\cdot)$, сходящаяся к f равномерно на $[0,1]$.

Следующее доказательство этой теоремы принадлежит Сергею Натановичу Бернштейну (1880–1968).

2.7. Пусть M — случайная величина, выражающая число успехов в n независимых испытаниях, если успех в одном испытании достигается с вероятностью $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда $\mathbb{P}(M = m) = \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}$ (**биномиальное распределение**), причем $\mathbb{E}(\frac{1}{n}M) = x$, $\mathbb{P}(|\frac{1}{n}M - x| > \delta) \leqslant \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ (**неравенство Чебышева**).

2.8. Положим $P_n(x) := \mathbb{E} f(\frac{1}{n}M) = \sum\limits_{0\leqslant m\leqslant n} f(\frac{m}{n}) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}$. Очевидно, $P_n(x)$ — многочлен от переменной x. Проверьте, что при $n \to \infty$ многочлены P_n сходятся к f равномерно на $[0,1]$.

Теорема Вейерштрасса может быть обобщена с многочленов на произвольную алгебру непрерывных функций на любом компактном множестве K, если элементы этой алгебры (1) *разделяют точки* K (т. е. для любых $x, y \in K$ найдется элемент алгебры $g(\cdot)$, для которого $g(x) \neq g(y)$) и (2) не обращаются все одновременно в нуль ни в какой точке $x \in K$ (**теорема Стоуна**). Если рассматривать комплекснозначные функции на K, то для справедливости этой теоремы алгебра должна быть еще замкнута относительно операции комплексного сопряжения (см., например, У. Рудин, Основы математического анализа, гл. 7).

2.9. Пространство $C[0,1]$ сепарабельно, т. е. обладает счетным всюду плотным множеством.

2.10. Пусть функция f непрерывна на $[0,1]$ и $\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ для всех $n \geqslant 1$. Покажите, что $f(x) \equiv 0$ на $[0,1]$.

2.11. Пусть функционал ℓ задан на (незамкнутом) подпространстве многочленов в $C[0,1]$. Можно ли непрерывно продолжить его на все $C[0,1]$, если (a) $\ell(p) = a_0$ (здесь и далее $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$); (b) $\ell(p) = \sum_{0\leqslant k\leqslant \deg p} a_k$; (c) $\ell(p) = \sum_{0\leqslant k\leqslant \deg p} (-1)^k a_k$; (d) $\ell(p) = \sum_{0\leqslant k\leqslant N} c_k a_k$? Здесь $\{c_k\}$ — произвольно заданный набор чисел.

3. Интеграл

Удобно начать с напоминания конструкции интеграла Римана. Чтобы не повторяться, изложим ее в несколько обобщенном виде.

¶3.a. Разбиением P отрезка $[a,b]$ назовем упорядоченный набор точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Разбиение Q назовем измельчением разбиения P, если $P \subset Q$. Наименьшим общим измельчением разбиений R и S является $R \cup S$.

¶3.b. Пусть $\alpha(\cdot)$ — произвольная монотонно возрастающая функция на $[a,b]$. Положим $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots, n$. Для функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ верхней и нижней интегральной суммами, соответствующими функции α и разбиению P, назовем

$$U(f,P,\alpha) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \sup\{f(x)\colon x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\}\,\Delta\alpha_i, \quad L(f,P,\alpha) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \inf\{f(x)\colon x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\}\,\Delta\alpha_i.$$

¶3.c. Если $P \subset Q$, то $L(f,P,\alpha) \leqslant L(f,Q,\alpha) \leqslant U(f,Q,\alpha) \leqslant U(f,P,\alpha)$.

¶3.d. Верхним и нижним интегралами Римана–Стилтьеса от функции f по функции α на отрезке $[a,b]$ называются $\inf_P U(f,P,\alpha)$ и $\sup_P L(f,P,\alpha)$. Если они совпадают, то их общее значение обозначается $\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha$ и называется *интегралом Римана–Стилтьеса* от f по α, а функция f называется *интегрируемой* по α.

3.1. Определим функции β_0, β_1 и β_2 так, что $\beta_j(x) = 0$ при $x < 0$, $\beta_j(x) = 1$ при $x > 0$ для всех $j = 0, 1, 2$, а в нуле $\beta_0(0) = 0$, $\beta_1(0) = 1$ и $\beta_2(0) = \frac{1}{2}$. Опишите классы функций, интегрируемых по β_0, β_1 и β_2.

3.2. (a) Показать, что функция Дирихле ($\chi(x) = 0$, если x иррационально и $\chi(x) = 1$, если x рационально) не интегрируема по x ни на каком конечном отрезке. (b) Интегрируема ли по x функция Римана: $\varphi(x) = 0$, если x иррационально, $\varphi(x) = 1/n$, если x выражено несократимой дробью m/n?

¶3.e. Если α строго монотонна на $[a,b]$ и f интегрируема по α, то f ограничена на $[a,b]$.

¶3.f. Для функции f, интегрируемой по α на $[a,b]$, при $a \leqslant x \leqslant b$ положим $F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$. Если f непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$, то F дифференцируема в x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$. Если существует такая дифференцируемая функция F, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

¶3.g. Если функции f, g интегрируемы по монотонно возрастающей функции α на отрезке $[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то: (a) $\int_a^b (f+g)\,\mathrm{d}\alpha = \int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha + \int_a^b g\,\mathrm{d}\alpha$ и $\int_a^b (\lambda f)\,\mathrm{d}\alpha = \lambda\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha$; (b) если f интегрируема по монотонно растущим α и β, а $\lambda \geqslant 0$, то $\int_a^b f\,\mathrm{d}(\lambda\alpha) = \lambda\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha$ и $\int_a^b f\,\mathrm{d}(\alpha+\beta) = \int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha + \int_a^b f\,\mathrm{d}\beta$, и в частности $\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha = \int_a^c f\,\mathrm{d}\alpha + \int_c^b f\,\mathrm{d}\alpha$; (c) если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha \leqslant \int_a^b g\,\mathrm{d}\alpha$; (d) $\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha\right| \leqslant \int_a^b |f|\,\mathrm{d}\alpha$; (e) если $|f(x)| \leqslant M$ на $[a,b]$, то $\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha\right| \leqslant M\,(\alpha(b) - \alpha(a))$.

¶3.h. Функция $\boldsymbol{\alpha}\colon [a,b] \to V$ называется *функцией ограниченной вариации*, если конечна величина $\mathrm{Var}_a^b\,\boldsymbol{\alpha} := \sup_P \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \|\boldsymbol{\alpha}(x_i) - \boldsymbol{\alpha}(x_{i-1})\|$, где супремум берется по всем разбиениям отрезка $[a,b]$.

Результаты пп. 3.e–3.g сохраняются (с очевидными изменениями обозначений) и в том случае, когда функции f, g, F действуют из $[a,b]$ в банахово пространство V, а функция α — числовая, а также когда функции f и т. п. числовые, а $\boldsymbol{\alpha}$ действует в V и имеет ограниченную вариацию.

3.3. Покажите, что числовая функция $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда $\gamma = \alpha - \beta$, где функции α и β мотононно возрастают. Единственно ли такое разложение? Если нет, можно ли естественно выделить какое-либо каноническое разложение скалярной функции ограниченной вариации в разность двух монотонных?

3.4. Если $\alpha, \beta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — функции ограниченной вариации, то функции $\alpha + \beta$ и $\alpha\beta$ также имеют ограниченную вариацию. Функция ограниченной вариации $\boldsymbol{\alpha}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ имеет не более счетного множества точек разрыва.

3.5. (a) Непрерывная функция f интегрируема по произвольной функции ограниченной вариации α. (b) Функция f ограниченной вариации интегрируема по произвольной непрерывной функции ограниченной вариации α. (c) Если функции f и α имеют ограниченную вариацию, а f сверх того непрерывна, то $\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha\,\mathrm{d}f$ (*формула интегрирования по частям*).

¶3.i. Непрерывное отображение $\boldsymbol{\gamma}$ отрезка $[a,b]$ в банахово пространство V называется *кривой* в V. Если отображение $\boldsymbol{\gamma}$ взаимно однозначно, оно называется *дугой*. Если $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\gamma}(b)$, но $\boldsymbol{\gamma}$ — дуга на любом сегменте, лежащем внутри $[a,b]$, то $\boldsymbol{\gamma}$ называется *простой замкнутой кривой*.

¶3.j. Кривая $\boldsymbol{\gamma}$ называется *спрямляемой*, если $\boldsymbol{\gamma}$ имеет ограниченную вариацию. Вариацию $\mathrm{Var}_a^b\,\boldsymbol{\gamma}$ в этом случае называют *длиной* кривой $\boldsymbol{\gamma}$.

3.6. Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ есть скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, а $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ — векторное поле, компоненты которого являются частными производными функции $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (т. е. $F_x = \partial\varphi/\partial x$ и т. д.). (a) Выразите интеграл $\int_0^{2\pi}\langle \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}\rangle$, где $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ через значения функции φ. (b) Покажите, что $\int\langle \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}\rangle = 0$ для любой простой замкнутой кривой $\boldsymbol{\gamma}$.

3.7. Многочленом Фурье степени N называется выражение $f(x) = \sum_{|n|\leqslant N} c_n \exp(\mathrm{i}nx)$; ряд Фурье определяется как бесконечная сумма аналогичного вида. (a) Покажите, что

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp(-\mathrm{i}nx)\,\mathrm{d}x;$$

в частности, $c_n = 0$ при $|n| > N$. (b) Пусть $F'(x) = \sum_n c_n \exp(\mathrm{i}nx)$, причем $c_0 = 0$; найдите коэффициенты разложения функции F в ряд Фурье. (c) Найдите коэффициенты разложения в ряд Фурье 2π-периодической функции f, которая на интервале $(-\pi,\pi)$ задается формулой $f(x) = x$. (d) Считая известной *теорему Парсеваля*: $\sum_n |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x$, вычислите значения дзета-функции Римана $\zeta(x) = \sum_{n\geqslant 0} n^{-x}$ в точках $x = 2$ и $x = 4$.

3.8. Пусть функция $f \in C([a,b])$. Покажите, что на отрезке $[a,b]$ найдется такая точка x, что: (a) $\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha = f(x)\,(\alpha(b) - \alpha(a))$ (*первая теорема о среднем*); (b) $\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha = f(a)\,(\alpha(x) - \alpha(a)) + f(b)\,(\alpha(b) - \alpha(x))$, если дополнительно известно, что f монотонна (*вторая теорема о среднем*).

3.9. Покажите, что $\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}(\sin x/x)\,\mathrm{d}x = 0$ для любого $p > 0$.

¶3.k. Построенную выше теорию интеграла можно перенести на *несобственные интегралы*, в которых неограниченным является либо подынтегральное выражение, либо отрезок интегрирования. Возникающие при этом пределы требуют отдельного обоснования. В частности, $\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ и $\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \lim_{c\uparrow b}\int_a^c f\,\mathrm{d}x$, если эти пределы существуют (в последнем случае функция f не предполагается ограниченной в окрестности точки b).

3.10. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$ — монотонно убывающая последовательность положительных чисел и $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $t_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k}$. (a) Покажите, что $s_n \leqslant t_k$ при $n < 2^k$ и $s_n \geqslant 2t_k$ при $2s_n \geqslant t_k$ при $n > 2^k$. Выведите отсюда, что ряд $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k\geqslant 1} 2^k a_{2^k}$ (*теорема Коши о «прореживании»*). (b) При каких условиях сходятся ряды $\sum_{n\geqslant 1} n^{-p}$, $\sum_{n\geqslant 1}[n(\log n)^p]^{-1}$? (c) Если функция $f\colon \mathbb{R}^{\geqslant 0} \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ монотонно убывает, то для сходимости интеграла $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$. (d) Исследуйте интеграл $\int_1^\infty \mathrm{d}x/(x\log x(\log\log x)^p)$ на сходимость.

¶3.l. Наконец, перенесем построенную теорию на многомерный случай. *Брусом* или *координатным параллелепипедом* в $\mathbb{R}^n$, заданным точками $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется декартово произведение n отрезков: $I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\,\}$. Разбиение бруса на подбрусы образуется совокупностью всевозможных декартовых произведений отрезков вида $x_{j-1}^{(i)} \leqslant x_i \leqslant x_j^{(i)}$, входящих в разбиения $P_i = \{a_i = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \ldots x_{k_i}^{(i)} = b_i\}$ отрезков-ребер координатного параллелепипеда. В формулах, выражающих такие разбиения, совокупность их элементов будем обозначать $\{I_{\boldsymbol{j}}\}$, не обозначая явно образующие их граничные точки и разбиения ребер.

¶3.m. В этой и следующей лекциях мы не будем вводить произвольную весовую функцию α, ограничивая мероопределение только объемом бруса $I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ называется число $|I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}| = \prod_{1\leqslant i\leqslant n}(b_i - a_i)$. Возникающий при этом интеграл будет называться интегралом Римана, а не Римана–Стилтьеса.

¶3.n. Пусть $f\colon I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \to \mathbb{R}$. Верхние и нижние интегральные суммы вводятся совершенно аналогично одномерному случаю и точно так же приводят к определениям верхнего и нижнего интегралов от функции f. В тех случаях, когда последние совпадают, их общее значение принимается за *интеграл Римана* от функции f по брусу $I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ и обозначается

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}} f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n.$$

¶3.o. (*Теорема Фубини.*) Пусть $I = J \times K$ — брус в $\mathbb{R}^{m+n}$, образованный декартовым произведением брусов $J \subset \mathbb{R}^m$ и $K \subset \mathbb{R}^n$, а f — функция, интегрируемая по I. Тогда существуют и равны между собой интегралы

$$\int_I f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_J\Bigl(\int_K f\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\Bigr)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_K\Bigl(\int_J f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Bigr)\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

где $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

4. Дифференциальные формы

¶4.a. Пусть V, W — банаховы пространства. Функция $f\colon V \to W$ называется *дифференцируемой* в точке $x \in V$, если найдется такой линейный оператор $A\colon V \to W$, что $f(x+\xi) = f(x) + A\xi + r(\xi)$ и $\|r(\xi)\|_W/\|\xi\|_V \to 0$ при $\|\xi\|_V \to 0$. Этот оператор A обозначается $\mathrm{d}f_x$ и называется *производной* функции f в точке x, а вектор $(\mathrm{d}f_x)\xi$ — *производной* f *по направлению* ξ.

4.1. Если производная $\mathrm{d}f_x$ существует, то она определена однозначно.

¶4.b. Далее будем считать, что V и W — конечномерные пространства, снабженные базисами $e_1, e_2, \dots, e_m \in V$ ($\dim V = m$) и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n \in W$ ($\dim W = n$). В частности, для любого $x \in V$ имеем $x = x^1 e_1 + \dots x^m e_m$ и $f(x) = f^1(x)e'_1 + \dots + f^n(x)e'_n$.

¶4.c. Если функция f дифференцируема в точке x, то

$$(\mathrm{d}f_x)e_i = \frac{\partial f^1}{\partial x^i}(x)\, e'_1 + \dots + \frac{\partial f^n}{\partial x^i}(x)\, e'_n,$$

где $\partial f^j/\partial x^i$ называется *частной производной* j-й компоненты функции f по координате x^i.

¶4.d. Частные производные образуют матрицу $[\partial f^j/\partial x^i]$, которая называется *матрицей Якоби* функции f. При $m = n$ матрица Якоби имеет определитель, который называется *якобианом*. Если $(y^1, \dots, y^n) = f(x^1, \dots, x^n)$, якобиан обозначают $\partial(y^1, \dots, y^n)/\partial(x^1, \dots, x^n)$.

¶4.e. Если $f\colon V \to \mathbb{R}$, то $\mathrm{d}f_x$ — линейная форма. Удобно обозначать элементы базиса в V^*, двойственного к $e_1, e_2, \dots, e_m$, через $\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \dots, \mathrm{d}x^m$ (т. е. $\mathrm{d}x^i(e_j) = 1$ при $i = j$ и 0 иначе) и пользоваться записью

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\,\mathrm{d}x^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m}\,\mathrm{d}x^m.$$

В частности, если $f(x) = x^i$, то $\mathrm{d}f = \mathrm{d}x^i$, так что введенное обозначение непротиворечиво.

¶4.f. Выражение $\alpha = g_1(x)\,\mathrm{d}x^1 + \dots + g_m(x)\,\mathrm{d}x^m$, где $g^i\colon V \to \mathbb{R}$ — гладкие функции (т. е. функции, дифференцируемые достаточное число раз, где «достаточность» определяется контекстом), называется *дифференциальной формой валентности* 1, или дифференциальной 1-формой.

¶4.g. Пусть $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^m)\colon [0,1] \to V$ — спрямляемая кривая (см. п. 3.i). *Криволинейный интеграл второго рода* вдоль кривой γ определяется как $\int_\gamma \alpha = \int_0^1 g_1(\gamma(t))\,\mathrm{d}\gamma^1(t) + \dots + \int_0^1 g_m(\gamma(t))\,\mathrm{d}\gamma^m(t)$.

4.2. Пусть функция $f\colon V \to \mathbb{R}$ дифференцируема во всех точках $x \in V$ и ее частные производные непрерывны. Покажите, что $\int_\gamma \mathrm{d}f = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$.

Дифференциальные 1-формы допускают естественную операцию интегрирования вдоль кривых — геометрических объектов размерности один. Обычные функции можно рассматривать как своего рода «формы валентности нуль», для которых место интегрирования занимает вычисление значений в точках — объектах размерности нуль. Операция дифференцирования устанавливает между формами валентностей 1 и 0 связь, в определенном смысле двойственную связи между одномерными кривыми и нульмерными точками при выделении граничных точек. Оказывается, эта связь может быть распространена на произвольные размерности.

4.3. Рассмотрим параллелепипед, натянутый на векторы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ m-мерного пространства V. Пусть $\omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ — полилинейная функция m векторов, которая обращается в нуль, если набор $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ линейно зависим, т. е. параллелепипед является «сплющенным». Покажите, что функция ω: (a) *антисимметрична*, т. е. изменяет знак при перестановке любой пары аргументов; (b) пропорциональна определителю матрицы $[(\xi_i)^j]$ размерности $m \times m$.

¶4.h. Форма $\Omega(\xi_1, \dots, \xi_m) = \det[(\xi_i)^j]$ называется *ориентированным m-мерным объемом* параллелепипеда, натянутого на векторы $\xi_1, \dots, \xi_m$, и образует базис одномерного пространства $\Lambda_m(V)$ антисимметричных полилинейных форм валентности m.

4.4. Общая антисимметричная полилинейная форма валентности k ($1 \leqslant k \leqslant m$) над векторами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ m-мерного пространства V образуется как линейная комбинация всевозможных k-мерных миноров матрицы $[(\xi_i)^j]$ размерности $m \times k$, т. е. пространство $\Lambda_k(V)$ таких форм имеет размерность $\binom{m}{k}$. В частности, $\Lambda_1(V) = V^*$.

¶4.i. По определению $\Lambda_0(V) := \mathbb{R}$.

¶4.j. Базисные элементы пространства $\Lambda_k(V)$ представляют собой ориентированные k-мерные объемы проекций k-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $\xi_1, \dots, \xi_k$, на k-мерные координатные подпространства (линейные оболочки k-элементных подмножеств $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ базиса пространства V) и обозначаются

$$\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) := \det \begin{bmatrix} (\xi_1)^{i_1} & (\xi_2)^{i_1} & \dots & (\xi_k)^{i_1} \\ (\xi_1)^{i_2} & (\xi_2)^{i_2} & \dots & (\xi_k)^{i_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1)^{i_k} & (\xi_2)^{i_k} & \dots & (\xi_k)^{i_k} \end{bmatrix}$$

Здесь без потери общности можно считать $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant m$: перестановки индексов приводят лишь к изменению знака базисной k-формы.

¶4.k. Постулируя тождество $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$ и свойство дистрибутивности $(f\,\mathrm{d}x_i + g\,\mathrm{d}x_j) \wedge \mathrm{d}x_k = f\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_k + g\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k$, операцию $\wedge$ можно распространить с базисных форм на произвольные формы. Так определенная операция $\wedge$ называется *внешним умножением*, поскольку произведение пары форм из пространств $\Lambda_k(V)$ и $\Lambda_\ell(V)$ лежит в другом пространстве $\Lambda_{k+\ell}(V)$. Тем самым совокупность $\Lambda(V) = \Lambda_0(V) \cup \Lambda_1(V) \cup \cdots \cup \Lambda_m(V)$ антисимметричных полилинейных форм всех порядков наделяется структурой градуированной алгебры, которую называют алгеброй *внешних (алгебраических) форм.*

4.5. Пусть $\alpha \in \Lambda_j(V)$, $\beta \in \Lambda_k(V)$, $\gamma \in \Lambda_\ell(V)$ — внешние формы над m-мерным пространством V. Покажите, что (a) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{jk} \beta \wedge \alpha$; (b) $\alpha \wedge \beta = 0$, если $j + k > m$; (c) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$, если $j + k + \ell \leqslant m$.

4.6. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ — набор 1-форм над V. Покажите, что

$$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) = \det \begin{bmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_1(\xi_2) & \ldots & \omega_1(\xi_k) \\ \omega_2(\xi_1) & \omega_2(\xi_2) & \ldots & \omega_2(\xi_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_k(\xi_1) & \omega_k(\xi_2) & \ldots & \omega_k(\xi_k) \end{bmatrix};$$

выведите отсюда, что значение внешней формы не зависит от выбора базиса в пространстве V.

4.7. Пусть $A\colon V \to W$ — линейный оператор из m-мерного пространства V в n-мерное пространство W и $\omega \in \Lambda_k(W)$. Покажите, что выражение $A^*\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) := \omega(A\xi_1, A\xi_2, \ldots, A\xi_k)$ корректно определяет внешнюю k-форму на V, причем $(AB)^* = B^* A^*$ и $A^*(\alpha \wedge \beta) = (A^*\alpha) \wedge (A^*\beta)$.

Сравнивая сигнатуры операций $A\colon V \to W$ и $A^*\colon \Lambda(V) \leftarrow \Lambda(W)$, можно понять, почему по-английски вторая из них называется pullback.

¶4.l. *Внешняя дифференциальная k-форма* над m-мерным пространством V — это выражение

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant m} g_{i_1 i_2 \ldots i_l}(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k},$$

где $g_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\cdot)$ — гладкие функции на V. Внешние дифференциальные формы образуют градуированную алгебру, аналогичную алгебре внешних алгебраических форм, в которой операции сложения, умножения на число и внешнего умножения определяются поточечно.

¶4.m. Пусть $\varphi\colon D \to V$ — гладкое отображение выпуклого многогранника $D \subset \mathbb{R}^k$ в m-мерное пространство V, где $m \geqslant k$, причем производная $\mathrm{d}\varphi_x$ имеет ранг k в любой точке $x \in D$. Для произвольной дифференциальной k-формы $\omega \in \Lambda_k(V)$ определим k-форму $\varphi^*\omega \in \Lambda_k(\mathbb{R}^k)$ по формуле (ср. п. 4.7)

$$\bigl(\varphi^*\omega(x)\bigr)(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) := \omega\bigl((\mathrm{d}\varphi_x)\xi_1, (\mathrm{d}\varphi_x)\xi_2, \ldots, (\mathrm{d}\varphi_x)\xi_k\bigr), \quad x \in D.$$

4.8. Пусть (r, θ, φ) — сферические координаты в $\mathbb{R}^3$, так что $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ и $z = r\cos\theta$. Выразите в сферических координатах элемент объема $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$. Найдите также выражение элемента объема в цилиндрических координатах (ρ, φ, z), где $x = \rho\cos\varphi$ и $y = \rho\sin\varphi$.

5. Интегрирование дифференциальных форм

¶5.a. Как и в п. 4.m, пусть $\varphi\colon D \to V$ — гладкое отображение выпуклого многогранника $D \subset \mathbb{R}^k$ в m-мерное пространство V, где $m \geqslant k$, причем производная $\mathrm{d}\varphi_x$ имеет ранг k в любой точке $x \in D$. Образ $\varphi(D) \subset V$ называется *(k-мерной) клеткой*; он представляет собой ориентированную гиперповерхность (с краем) размерности k в V.

До сих пор ориентация векторного пространства неформально понималась как фиксированный порядок векторов в его базисе, т. е. была связана с конкретным выбором координат. Введем бескоординатное понятие ориентации.

¶5.b. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_m$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_m$ — два различных базиса в m-мерном пространстве V, причем $e'_j = \sum_i t^i_j e_i$. Будем называть их *одинаково ориентированными*, если $\det[t^i_j] > 0$. Этим отношением все базисы разбиваются на два класса. По определению, в пространстве V задана *ориентация*, если в нем зафиксирован один *ориентирующий базис*. Любой другой базис называется *положительно* ориентированным, если он находится в том же классе, что ориентирующий базис, и *отрицательно* ориентированным в противном случае.

¶5.c. *(Теорема о замене переменной в кратном интеграле.)* Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^k$ — два замкнутых ограниченных выпуклых многогранника и $f\colon D_1 \to D_2$ — гладкое отображение, взаимно однозначно отображающее внутренность D_1 на внутренность D_2 и такое, что якобиан f положителен всюду во внутренности D_1. Тогда отображение f сохраняет ориентацию, т. е. базис $f_*e_1, \dots, f_*e_m$ одинаково ориентирован с базисом $e_1, \dots, e_m$, и $\int_{D_2} \omega = \int_{D_1} f^*\omega$ для любой $\omega \in \Lambda_k(\mathbb{R}^k)$.

¶5.d. Функция $(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, x_1x_2, \dots, x_1x_2 \dots x_k)$ взаимно однозначно отображает внутренность единичного куба $(0,1)^k$ на внутренность k-мерного симплекса и имеет всюду положительный якобиан.

Поскольку произвольный k-мерный выпуклый многогранник можно представить как объединение k-мерных симплексов с непересекающимися внутренностями, интеграл по произвольному выпуклому многограннику сводится к сумме интегралов по брусам, которые уже были определены в п. 3.n.

¶5.e. В частном случае интегрирования m-формы $\omega = f(x)\,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^m$ по выпуклому многограннику D в $\mathbb{R}^m$, где $f(\cdot)$ — гладкая (а значит, непрерывная) функция, положим $\int_D \omega = \int_D f(x)\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 \dots \mathrm{d}x^m$. Чтобы определить интеграл формы ω по произвольной k-мерной клетке $\sigma = \varphi(D)$, положим по определению (ср. п. 4.g)

$$\int_\sigma \omega := \int_D \varphi^*\omega.$$

В силу теоремы о замене переменной это определение зависит только от самой клетки σ и дифференциальной формы ω, а выбор подлежащего многогранника D и отображения φ может быть сделан произвольно.

¶5.f. k-мерной *цепью* $c = m_1\gamma_1 + \dots + m_r\sigma_r$ называется формальная линейная комбинация k-мерных клеток $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ с произвольными целочисленными коэффициентами $m_1, \dots, m_r$, которые называются *кратностями* соответствующих клеток. Считается, что $m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 = m_2\sigma_2 + m_1\sigma_1$, $m_1\sigma + m_2\sigma = (m_1 + m_2)\sigma$, $0\sigma = 0$ и $\sigma + 0 = \sigma$.

Одним из основных примеров цепи является граница многогранника.

¶5.g. Пусть D — выпуклый многогранник в m-мерном векторном пространстве V. Для каждой грани F_i этого многогранника определим ориентирующий базис следующим образом. Пусть n — вектор внешней нормали к D в одной из внутренних точек грани F_i. Выберем $m-1$ линейно независимых векторов $e_1, \dots, e_{m-1}$ так, чтобы грань F_i была параллельна линейной оболочке этих векторов (т. е. для любых $x', x'' \in F_i$ вектор $x'' - x'$ является линейной комбинацией e_i) и базис $n, e_1, \dots, e_{m-1}$ был положительно ориентирован.

¶5.h. *Границей D* называется цепь $\partial D := \sum_i F_i$. *Границей клетки* $\sigma = \varphi(D)$ называется цепь $\partial\sigma := \sum_i \varphi(F_i)$, где $\sum_i F_i = \partial D$. *Границей цепи* $c = m_1\sigma_1 + \dots + m_r\sigma_r$ называется цепь $\partial c := m_1\partial\sigma_1 + \dots + m_r\partial\sigma_r$.

5.1. $\partial(\partial c) = 0$ для любой цепи c.

¶5.i. Если $\omega \in \Lambda_k(V)$, а $c = m_1\sigma_1 + \dots m_r\sigma_r$ — k-мерная цепь, то $\int_c \omega := m_1 \int_{\sigma_1} \omega + \dots + m_r \int_{\sigma_r} \omega$.

Функциональная зависимость дифференциальных форм от координат позволяет характеризовать их малые «приращения» в терминах особой дифференциальной операции — внешнего дифференциала.

¶5.j. Рассмотрим $(k+1)$-мерный параллелепипед Π в m-мерном пространстве V, натянутый на векторы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+1}$ $(1 \leqslant k \leqslant m-1)$, его гомотетический образ $\Pi_{\varepsilon,x} = x + \varepsilon\Pi$ и дифференциальную k-форму $\omega \in \Lambda_k(V)$. Тогда существует и однозначно определена такая внешняя

дифференциальная $(k+1)$-форма $\mathrm{d}\omega$, для которой
$$\int_{\partial \Pi_{\varepsilon,x}} \omega = \varepsilon^{k+1} \mathrm{d}\omega(\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}) + r_1(\varepsilon) = \int_{\Pi_{\varepsilon,x}} \mathrm{d}\omega + r_2(\varepsilon),$$
где $r_{1,2}(\varepsilon)/\varepsilon^{k+1} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Если $\omega = \sum g_{i_1 \ldots i_k}\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$, то $\mathrm{d}\omega = \sum \mathrm{d}g_{i_1 \ldots i_k} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$. Дифференциальная форма $\mathrm{d}\omega$ называется *внешним дифференциалом* формы ω.

5.2. Пусть $\alpha = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$, $\beta = F\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + G\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + H\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$, где f, g, h, F, G, H — функции переменных x, y, z. Выпишите явные выражения для $\mathrm{d}\alpha$ и $\mathrm{d}\beta$ в координатах.

5.3. Покажите, что $\mathrm{d}(\omega \wedge \chi) = \mathrm{d}\omega \wedge \chi + (-1)^k\, \omega \wedge \mathrm{d}\chi$, где $\omega \in \Lambda_k$.

5.4. Покажите, что $\varphi^* \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\varphi^* \omega)$.

¶5.k. *(Обобщенная теорема Стокса.)* Пусть c — $(k+1)$-цепь, а ω — дифференциальная k-форма в пространстве V $(\dim V \geqslant k+1)$. Тогда
$$\int_{\partial c} \omega = \int_c \mathrm{d}\omega.$$

Дополнение к лекции 5: упражнения

5.5. Пусть A и B — выпуклые многоугольники на плоскости. Докажите, что $\mathrm{Vol}_2(\alpha A + \beta B)$ является многочленом второй степени от α и β.

5.6. Обобщите утверждение предыдущей задачи на выпуклые многогранники произвольной размерности.

5.7. Пусть $a_0, \dots, a_n$ — такая система точек в $\mathbb{R}^n$, что векторы $a_i - a_0$, $i = 1, \dots, n$, линейно независимы. Пусть σ — перестановка множества $\{0, \dots, n\}$. Покажите, что базис $a_{\sigma(i)} - a_{\sigma(0)}$ задает ту же ориентацию, что и базис $a_i - a_0$ тогда и только тогда, когда когда перестановка σ четная.

5.8. Докажите, что объем выпуклого многогранника P в $\mathbb{R}^3$ равен абсолютной величине интеграла $\int_{\partial P} x_1 \, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$.

5.9. Пусть s — любая дуга гиперболы $x_1 x_2 = 1$, лежащая в первом квадранте. Обозначим через A площадь множества точек, лежащих под дугой s и выше горизонтальной оси, а через B площадь множества точек, лежащих слева от дуги s и правее вертикальной оси. Докажите, что $A = B$.

5.10. Найдите объем n-мерного шара радиуса 1.

5.11. Обозначим $\mathrm{d}V := \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ (форма объема). Пусть S — поверхность единичной сферы. Вычислите интегралы: (a) $\int_S \mathrm{d}V$, (b) $\int_S x_1 \, \mathrm{d}V$, (c) $\int_S x_1^2 \, \mathrm{d}V$.

5.12. Гладкая функция $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ называется *гармонической* в области $G \subset \mathbb{R}^3$, если она имеет непрерывные вторые производные в этой области и удовлетворяет в ней уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$. Докажите, что если u гармонична в окрестности единичного шара с центром в начале координат, то $u(0,0,0) = \frac{1}{4\pi} \int_S u \, \mathrm{d}V$.

6. Мера и интеграл Лебега I

6.1. В п. 2.g был предложен пример функции $x \mapsto f(x)$, которая равна нулю при иррациональных значениях x и единице — при рациональных x. Покажите, что: (a) верхний и нижний интегралы Римана от этой функции на $[0,1]$ равны 1 и 0 соответственно; (b) множество рациональных точек отрезка $[0,1]$ может быть покрыто счетной системой интервалов сколь угодно малой суммарной длины.

Таким образом, множество рациональных точек отрезка $[0,1]$ имеет нулевую длину, и поведение функции f на нем не должно влиять на значение интеграла $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Конструкция интеграла Римана является слишком грубой, чтобы правильно обработать такую ситуацию. Таким свойством обладает интеграл Лебега, построение которого в свою очередь основано на понятии меры Лебега. Последняя конструкция ничем не проще абстрактной конструкции меры на произвольном множестве X, с которой мы и начнем.

¶6.a. Пусть X — произвольное множество, 2^X — совокупность всех его подмножеств. *Мерой* на X называется такая функция $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}^{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}$, что $\mu(\varnothing) = 0$ и $\mu(A) \leqslant \sum_i \mu(A_i)$, если $A \subset \bigcup_i A_i$.

¶6.b. Множество A называется *μ-измеримым*, если $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$ для любого B.

Обычно функцию μ называют *внешней мерой*, а под *мерой* понимают ее ограничение на совокупность μ-измеримых множеств. Принятая здесь и ниже терминология соответствует книге Л. К. Эванса и Р. Ф. Гариепи «Теория меры и тонкие свойства функций» (Новосибирск: Научная книга, 2002), которой в основном следует изложение в этой лекции.

6.2. *Примеры.* (a) Формула $\lambda^1(A) = \inf\bigl\{\sum_i \operatorname{diam} C_i\colon A \subset \bigcup_i C_i,\ C_i \subset \mathbb{R}\bigr\}$ определяет *меру Лебега* λ^1 на $\mathbb{R}$; (b) если $P = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное подмножество пространства X, то формула $\nu_P(A) := \#\{x \in P \cap A\}$ определяет *считающую меру*, связанную с множеством P; (c) положим $\mathcal{H}^d_\delta(A) = \inf\bigl\{\sum_i \Omega_d(\operatorname{diam} C_i/2)^d\colon A \subset \bigcup_i C_i \subset \mathbb{R}^n, \operatorname{diam} C_i \leqslant \delta\bigr\}$. Тогда формула $\mathcal{H}^d(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^d_\delta(A)$ определяет *d-мерную меру Хаусдорфа* на $\mathbb{R}^n$.

6.3. (a) Если $A \subset B$, то $\mu(A) \leqslant \mu(B)$; (b) если $\mu(A) = 0$, то A μ-измеримо; (c) если A μ-измеримо, его дополнение также μ-измеримо. Пусть теперь $A_1, A_2, \dots$ μ-измеримы. Тогда (d) $\bigcup_i A_i$ и $\bigcap_i A_i$ μ-измеримы; (e) если $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то $\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$; (f) если $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, то $\mu(\bigcap_i A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

¶6.c. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *μ-измеримой*, если $\{\,x\colon f(x) < a\,\}$ является μ-измеримым при любом $a \in \mathbb{R}$.

¶6.d. *Характеристической функцией* множества $A \subset X$ называется функция $\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$ иначе.

6.4. (a) Характеристическая функция множества μ-измерима тогда и только тогда, когда μ-измеримо само множество; (b) если функции f и g являются μ-измеримыми, то функции $f+g$, fg, af $(a \in \mathbb{R})$, $\min(f,g)$ и $|f|$ также измеримы. Измерима и функция f/g на множестве, где $g \neq 0$.

¶6.e. Положим $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ и $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$, так что $f = f^+ - f^-$.

¶6.f. Свойство P выполнено *μ-почти всюду* (*μ-п. в.*), если $\mu(\{x\colon P \text{ не выполнено}\}) = 0$.

¶6.g. Пусть f_i, $i \geqslant 1$ — последовательность μ-измеримых функций. Тогда μ-измеримы $\sup_i f_i$, $\inf_i f_i$, а также $\limsup_{i\to\infty} f_i$ и $\liminf_{i\to\infty} f_i$.

◄ Поскольку $\{\,x\colon \inf f_i(x) < a\,\} = \bigcup_i \{\,x\colon f_i(x) < a\,\}$ и $\{\,x\colon \sup f_i(x) < a\,\} = \bigcap_i \{\,x\colon f_i(x) < a\,\}$, точные нижние и верхние грани измеримых множеств измеримы. Аналогичные утверждения о пределах вытекают из того, что $\liminf_{i\to\infty} f_i = \sup_{k\geqslant 1} \inf_{i\geqslant k} f_i$ и $\limsup_{i\to\infty} f_i = \inf_{k\geqslant 1} \sup_{i\geqslant k} f_i$. ►

В частности, μ-измеримость сохраняется при поточечном предельном переходе.

¶6.h. Функция $g\colon X \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если множество ее значений не более чем счетно.

¶6.i. Для неотрицательной простой μ-измеримой функции g положим $\int g\,\mathrm{d}\mu := \sum_y y \cdot \mu(g^{-1}(y))$. Для общей простой функции $g = g^+ - g^-$ положим $\int g\,\mathrm{d}\mu = \int g^+\,\mathrm{d}\mu - \int g^-\,\mathrm{d}\mu$, если хотя бы одно из слагаемых в правой части конечно. Простая μ-измеримая функция g называется μ-интегрируемой, если ее интеграл $\int g\,\mathrm{d}\mu$ определен; множество таких функций обозначим $\mathcal{L}_\mu$. *Верхним* и *нижним интегралами Лебега* называются

$$\int^* f\,\mathrm{d}\mu := \sup\Bigl\{\int g\,\mathrm{d}\mu\colon g \in \mathcal{L}_\mu,\ g \geqslant f\ \mu\text{-п. в.}\Bigr\}, \qquad \int_* f\,\mathrm{d}\mu := \inf\Bigl\{\int g\,\mathrm{d}\mu\colon g \in \mathcal{L}_\mu,\ g \leqslant f\ \mu\text{-п. в.}\Bigr\};$$

μ-измеримая функция f называется *интегрируемой по Лебегу*, если $\int^* f\,\mathrm{d}\mu = \int_* f\,\mathrm{d}\mu$. Общее значение этих интегралов обозначается $\int f\,\mathrm{d}\mu$ и называется *интегралом Лебега* функции f по мере μ.

6.5. Интеграл Лебега обладает свойствами, аналогичными свойствам интеграла Римана–Стильтьеса (п. 3.g).

¶6.j. (*Теорема Беппо Леви.*) Пусть $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \dots$ — последовательность μ-измеримых функций $X \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ и $f = \lim_{i\to\infty} f_i \colon X \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Тогда $\lim_{i\to\infty} \int f_i \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.

◀ Очевидно, что $\int f_j \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int f \,\mathrm{d}\mu$, откуда $\lim_{j\to\infty} \int f_j \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int f \,\mathrm{d}\mu$. Докажем противоположное неравенство. Выберем неотрицательную простую функцию $g \geqslant f$. При каждом $\varepsilon > 0$ множества $A_i^\varepsilon := \{\, x \colon f_i(x) > (1+\varepsilon) g(x) \,\}$ образуют вложенную последовательность с пустым пересечением $\bigcap_i A_i^\varepsilon = \varnothing$. Поэтому $\int f_i \,\mathrm{d}\mu \leqslant (1+\varepsilon) \int_{X\setminus A_i^\varepsilon} g \,\mathrm{d}\mu + \int_{A_i^\varepsilon} f_1 \,\mathrm{d}\mu$ или

$$\int f_i \,\mathrm{d}\mu \leqslant (1+\varepsilon) \int g \,\mathrm{d}\mu - \int_{A_i^\varepsilon} g \,\mathrm{d}\mu + \int_{A_i^\varepsilon} f_1 \,\mathrm{d}\mu.$$

В пределе $i \to \infty$ последние два слагаемых стремятся к нулю в силу п. 6.3, f, и получается оценка $\lim_{i\to\infty} \int f_i \,\mathrm{d}\mu \leqslant (1+\varepsilon) \int g \,\mathrm{d}\mu$. Переходя к точной нижней грани по всем $g \geqslant f$, а затем по всем $\varepsilon > 0$, получаем искомое неравенство. ▶

¶6.k. Пусть μ — мера на X, а ν — мера на Y. Положим $(\mu\times\nu)(S) := \inf \sum_i \mu(A_i)\nu(B_i)$, где точная нижняя грань берется по всем конечным или счетным покрытиям множества $S \subset X \times Y$ вида $S \subset \bigcup_i A_i \times B_i$, где все A_i μ-измеримы, а все B_i ν-измеримы. Тогда $\mu\times\nu$ есть мера на $X \times Y$, которая называется *произведением* мер μ и ν.

¶6.l. Будем называть множества вида $\bigcup_i A_i \times B_i$, где A_i μ-измеримы, а все B_i ν-измеримы, *элементарными.* Поскольку $(A_1\times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ и $(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = \big((A_1 \setminus A_2) \times B_1\big) \cup \big((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)\big)$, точную нижнюю грань в предыдущем пункте достаточно распространять лишь на покрытия непересекающимися множествами.

6.6. Если A μ-измеримо, а B ν-измеримо, то $A\times B$ $(\mu\times\nu)$-измеримо и $(\mu\times\nu)(A\times B) = \mu(A)\nu(B)$.

6.7. Для $S \subset X \times Y$ определим $S_X(y) := \{\, x \in X \colon (x,y) \in S \,\}$ и $S_Y(x) := \{\, y \in Y \colon (x,y) \in S \,\}$. Для всякого элементарного множества S функции $\mu(S_X(\cdot)) \colon Y \to \mathbb{R}^{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}$ и $\nu(S_Y(\cdot)) \colon X \to \mathbb{R}^{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}$ измеримы, и выполнены равенства

$$(\mu\times\nu)(S) = \int_Y \mu(S_X(y)) \,\mathrm{d}\nu(y) = \int_X \nu(S_Y(x)) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Распространим полученный результат с элементарных на произвольные множества.

¶6.m. Формула п. 6.7 выполнена для $R = \bigcap_i R_i$, если все R_i элементарны и $R_1 \supset R_2 \supset \dots$

◀ Благодаря непрерывности меры относительно монотонного предельного перехода (п. 6.3, f) $(\mu\times\nu)(R) = \lim_{i\to\infty} (\mu\times\nu)(R_i) = \lim_{i\to\infty} \int_X \mu(R_{i,X}(y)) \,\mathrm{d}\nu(y)$. Но $\mu(R_{i,X}(\cdot))$ — невозрастающая ограниченная снизу последовательность измеримых функций, которая сходится к $\mu(R_X(\cdot))$, и утверждение следует из п. 6.j. ▶

¶6.n. Формула п. 6.7 имеет место для всех множеств S, хотя $\mu(S_X(\cdot))$ может существовать лишь ν-почти всюду (аналогично для $\nu(S_Y(\cdot))$).

◀ Выберем R_i' так, чтобы $S \subset R_i'$ и $(\mu\times\nu)(R_i') \leqslant (\mu\times\nu)(S) + \frac{1}{i}$. Положим $R_i = \bigcap_{1\leqslant j\leqslant i} R_j'$; тогда $R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset S$ и $(\mu\times\nu)(S) = (\mu\times\nu)(\bigcap_i R_i)$, причем для $R := \bigcap_i R_i$ формула п. 6.7 имеет место. Положим $T = R \setminus S$, тогда $(\mu\times\nu)(T) = 0$. Представляя $T = \bigcap_i T_i$, где последовательность элементарных множеств T_i убывает и $(\mu\times\nu)(\bigcap_i T_i) = 0$, получаем $0 = \mu((\bigcap_i T_i)_X(y)) \geqslant \mu(T_X(y)) \geqslant 0$ для ν-почти всех y. Следовательно, $\mu(S_X(y)) = \mu(R_X(y))$ ν-почти всюду, откуда следует доказываемое утверждение. ▶

6.8. *Подграфиком* неотрицательной функции $f \colon X \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ будем называть множество $\operatorname{hypo} f := \{\, (x,y) \colon x \in X, 0 \leqslant y \leqslant f(x) \,\}$ (ср. п. 2.e). Покажите, что $(\mu \times \lambda^1)(\operatorname{hypo} f) = \int_X f(x) \,\mathrm{d}\mu(x)$.

¶6.o. (*Теорема Фубини.*) Если функция $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ суммируема по мере $\mu\times\nu$, то функции $\int_X f(x,\cdot) \,\mathrm{d}\mu(x)$ и $\int_Y f(\cdot,y) \,\mathrm{d}\nu(y)$ суммируемы соответственно по мерам ν и μ, и выполнены соотношения

$$\int f(x,y) \,\mathrm{d}(\mu\times\nu)(x,y) = \int_X \Big(\int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \Big) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X f(x,y) \,\mathrm{d}\mu(x) \Big) \mathrm{d}\nu(y).$$

◀ Если f неотрицательна, достаточно применить формулу п. 6.7 к подграфику f в пространстве $X \times Y \times \mathbb{R}$. В общем случае представим $f = f^+ - f^-$, заметим, что теорема Фубини верна для f^+ и f^- по отдельности, и воспользуемся линейностью интеграла относительно подынтегральной функции. ▶

¶6.p. Мера Лебега на $\mathbb{R}^d$ определяется как $\lambda^d := \lambda^1 \times \lambda^1 \times \dots \times \lambda^1$ (d раз).