

## Представления симметрической группы

- A8.1.** Для каждого неприводимого представления группы  $\mathfrak{S}_4$  укажите соответствующую диаграмму Юнга.
- A8.2.** Пусть  $U$  — это  $(n - 1)$ -мерное неприводимое представление группы  $\mathfrak{S}_n$  симметриями  $(n - 1)$ -мерного симплекса.
- Докажите, что всякая внешняя степень  $\Lambda^k U$  неприводима.
  - Найдите соответствующие диаграммы Юнга.
- A8.3. а)** Докажите, что тензорное произведение 1-мерного знакового представления на неприводимое представление  $V_\lambda$  группы  $\mathfrak{S}_n$  есть представление  $V_{\lambda^*}$  для транспонированной диаграммы Юнга  $\lambda^*$ .
- Для каких диаграмм Юнга  $\lambda$  ограничение представления  $V_\lambda$  на подгруппу  $\mathfrak{A}_n$  неприводимо?
  - На сколько неприводимых компонент это представление раскладывается в том случае, когда оно приводимо?
- A8.4. а)** Опишите все неприводимые представления группы  $\mathfrak{S}_5$  и найдите их размерности.
- Тот же вопрос для группы  $\mathfrak{A}_5$ .
- A8.5.** Докажите, что ограничение всякого неприводимого представления группы  $\mathfrak{S}_n$  на подгруппу  $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{n-2}$  имеет простой спектр (то есть раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений без кратностей).
- A8.6.** Пусть  $V$  —  $n$ -мерное представление группы  $\mathfrak{S}_n$  перестановками базисных векторов.
- Какие неприводимые представления входят в разложение  $V \otimes V_\lambda$  для произвольной диаграммы Юнга  $\lambda$ ?
  - Чему равны кратности их вхождения?