Комплексные поверхности 1: классы Черна

Задача 1.1. Определите расслоенное произведение объектов в категории (в терминах объектов и морфизмов).

Определение 1.1. Произведение объектов категории есть расслоенное произведение над терминальным объектом.

Определение 1.2. Пусть A есть категория с конечным объектом 1 и произведениями. **Групповой объект** в A есть $X \in \mathcal{O}b(A)$, снабженный морфизмом $X \times X \xrightarrow{\mu} X$ ("умножения"), морфизмом $1 \xrightarrow{\varepsilon} X$ ("единицей), и $a: X \longrightarrow X$ ("обращение"), удовлетворяющий аксиомам асоциативности $(\mu \times \mathsf{Id}) \circ \mu = (\mathsf{Id} \times \mu) \circ \mu$ и обратного элемента $\mu \circ (1 \times a) \circ \mathsf{diag} = \Pi_1 \circ \varepsilon$, где Π_1 есть морфизм в терминальный объект.

Замечание. Нетрудно проверить, что групповой объект в категории множеств это группа, а групповой объект объект в категории топологических пространств - топологическая группа.

Задача 1.2. Что такое групповой объект в категории векторных пространств?

Задача 1.3. Докажите, что алгебра Хопфа – то же самое, что коммутативный групповой объект в категории $\mathcal{A}^\circ$, где $\mathcal{A}$ – категория коммутативных, ассоциативных алгебр с единицей над полем.

Задача 1.4. Докажите, что пространство петель $\Omega(BU)$ гомотопически эквивалентно группе U.

Задача 1.5 (*). Рассмотрим 14-мерную компактную группу $G_2 \subset GL(7, \mathbb{R})$ матриц, сохраняющих общую 3-форму на $\mathbb{R}^7$. Верно ли, что G_2 гомотопически эквивалентна какому-то пространству петель?

Задача 1.6 (*). Найдите рациональные когомологии бесконечномерного вещественного многообразия Грассмана $Gr(\mathbb{R})$.

Задача 1.7. Пусть $Y \longrightarrow X$ – локально тривиальное расслоение, слой которого стягиваем, и база тоже стягиваема. Докажите, что Y стягиваемо.

Задача 1.8. Пусть $X_\infty = \bigcup X_i$ – счетное объединение стягиваемых клеточных пространств $X_1 \subset X_2 \subset ...$ Докажите, что X_∞ тоже стягиваемо.

Задача 1.9. Докажите, что классы Черна единственным образом определяются функториальностью, формулой Уитни и нормализацией.