.

ПОДРОБНАЯ ПРОГРАММА КУРСА ТОПОЛОГИИ-1

(для подготовки к зачету и экзамену, весна 2012)

Представленная ниже программа не является конспектом лекционного курса. В ней, чтобы помочь студентам готовится к зачету и экзамену, перечислены определения и теоремы, появившиеся в каждой лекции. В тех случаях, когда теорема на лекции не доказывалась, это отмечено записью "без док-ва"; отсутствие такой записи означает, что теорема на лекции была доказана, и полезно вспомнить, как это делалось (пользуясь записями лекций или брошюрой *Topology-1* Прасолова и Сосинского); учить доказательства наизусть не следует. Обычно на лекциях, при введении новых понятий, приводились примеры; в настоящей программе они опущены; при подготовке к экзамену полезно для каждого определения вспоминать или придумывать конкретные объекты, удовлетворяющие (или не удовлетворяющие) этому определению.

Лекция 1. ТОПОЛОГИЯ ПОДМНОЖЕСТВ $\mathbb{R}^n$

В этой лекции изучаются только подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$, и символы $X, Y, Z, U, V, \dots$ всегда обозначают такие множества.

§1. Непрерывность

Определение (на языке $\varepsilon - \delta$) непрерывной функции одной переменной $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывной функции многих переменных $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и непрерывного отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Определение открытого (замкнутого) подмножества $\mathbb{R}^n$ и открытого (замкнутого) подмножества данного множества $X \subset \mathbb{R}^n$,

Основное определение: отображение $f : X \to Y$ *непрерывно*, если прообраз $f^{-1}(V)$ любого открытого подмножества $V \subset Y$ – открытое подмножество X. Определение непрерывности отображения в точке.

Теорема 1. *Композиция непрерывных отображений – непрерына.*

§2. Граница, внутренность, замыкание

Определение границы, внутренности, замыкания множества $X \subset \mathbb{R}^n$, граничной и внутренной точки $x \in X$.

Теорема 2. (i) *Замыкание данного множества X – наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее X*

(ii) *Внутренность данного множества X – наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в X.*

(iii) *Граница множества – разность между его замыканием и внутренностью.*

§3. Топологическая эквивалентность

Определение гомеоморфизма (=топологической эквивалентности) и топологического свойства. (здесь на лекции приводились многочисленные примеры).

§4. Связность

Определение линейной связности и связности.

Теорема 3. *Непрерывный образ линейно связного множества – линейно связен.*

Теорема 4. *Непрерывный образ связного множества – связное множество.*

Теорема 5. *Всякое линейно связное множество связно.*

§5. Компактность

Определение компактности через понятие покрытия.

Теорема 6. *Непрерывный образ компакта – компакт.*

Теорема 7. *Подмножество $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.* (без док-ва)

Лекция 2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И КОНСТРУКЦИИ

§1. Аксиомы топологического пространства

Аксиоматическое определение топологического пространства, топология, база топологии. Определение индуцированной топологии.

§2. Аксиомы метрического пространства

Аксиоматическое определение метрического пространства. Определение ε-шара и метрической топологии.

§3. Начала общей топологии

Под началами общей топологии здесь понимаются определения и теоремы 1–6 из предыдущей лекции, но сформулированные в общей ситуации, т.е., в категории топологических пространств и их непрерывных отображений, а не в частной ситуации подмножеств $\mathbb{R}^n$ и их непрерывных отображений, рассмотренной в лекции 1. При этом все формулировки и доказательства повторяются слово в слово, нужно только слова "подмножество $\mathbb{R}^n$"всюду заменить на "топологическое пространство". В самой лекции эти формулировки и доказательства не повторялись, но студентам рекомендуется при подготовке к зачету хотя бы частично это мысленно повторить.

§4. Декартого произведение

Определение декартового произведения (через базу топологии). Было упомянуто без доказательства то, что произведение компактных, связных, линейно связных пространств будет, соответственно, компактным, связным, линейно связным пространством (однако эти доказательства, состоящие в сущности лишь в расшифровки определений, студенты должны уметь проводить).

Определение цилиндра над данным множеством ($X \times [0, 1]$).

§5. Дизъюнктное объединение

Определение дизъюнктного объединения (в том числе двух пересекающихся множеств).

§5. Фактор пространства

Определение фактор пространства топологического пространства с заданным отношением эквивалентности.

Определение конуса и надстройки над данным топологическим пространством, определения джойна двух топологических пространств. Джойн двух сфер размерности n и m – сфера размерности $n + m$ (это доказывалось на упражнениях).

Определение склейки двух пространств по отображению (в частности, по гомеоморфизму) их подмножеств.

.

Лекция 3. ПОВЕРХНОСТИ

§1. Определения

Под *поверхностью* в курсе понимается компактное линейно связное топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому двумерному диску. Поверхность называется *ориентированной*, если она не содержит листа Мёбиуса.

Конструкции: склейка поверхностей из многоугольников отождествлением сторон, в частности склейка тора, проективной плоскости и бутылки Клейна из квадрата. Определение сферы с g ручками M_g.

Определение поверхности-с-краем, определение края ∂N поверхности-с-краем N.

Теорема 1. *Край поверхности-с-краем является дизъюнктным объединением конечного числа топологических окружностей.*

§2. PL-поверхности

Определение 0-мерного, 1-мерного и 2-мерного симплекса и PL-поверхности (=триангулированной поверхности=кусочно-линейной поверхности), а также PL-поверхности-с-краем. Грани, ребра, вершины PL-поверхности. Определение PL-отображения (=симплициального отображения) как непрерывного отображения переводящего линейно каждый симплекс на симплекс (не обязательно той же размерности).

Определение подразделения PL-поверхности: подразделение грани и ребра, барицентрическое подраздление. Изоморфизм PL-поверхностей. PL-эквивалентность двух PL-поверхностей (как изоморфизм некоторых их подразделений).

Теорема 2. *Любая PL-поверхность (с краем или без) триангулируема (является PL-поверхностью). Две поверхности гомеоморфны тогда и только тогда, когда они PL-эквивалентны.* (без док-ва!)

§3. Эйлерова характеристика поверхности

Определение эйлеровой характеристики PL-поверхности.

Теорема 3. *PL-эквивалентные поверхности имеют одинаковые эйлеровы характеристики.*

В силу (не доказанной) теоремы 2, для любой поверхности (в том числе поверхности не снабженной PL-структурой) корректно определена эйлерова характеристика.

§3. Ориентация

Определение ориентации одномерного и двумерного симплекса; определение когерентной ориентации всех двумерных симплексов поверхности.

Теорема 4. *PL-поверхность (с краем или без) обладает когерентной ориентацией тогда и только тогда, когда она ориентируемая (т.е. не содержит листа Мёбиуса).*

§3. Связная сумма поверхностей

Определение связной суммы PL-поверхностей (корректность определения без док-ва!).

Теорема 5. *Эйлерова характеристика связной суммы двух поверхностей равна сумме их эйлеровых характеристик минус 2. Следовательно, эйлерова характеристика сферы с g ручками равна $2-2g$, а связной суммы h экземпляров проективной плоскости равна $3-2h$.*

——-

.

Лекция 4. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§1. Классификация ориентированных поверхностей

Определение звезды вершины PL-поверхности (как объединение всех симплексов, содержащих эту вершину), а также звезды любого набора симплексов поверхности. В двукратном барицентрическом подразделении PL-поверхности определяются: полоски, заплаты и начальный диск (как звезда во втором барицентрическом подраздении максимального дерева в графе, образованном одномерным остовом *исходной* триангуляции).

Теорема 1. *Любая ориентированная поверхность (без края) гомеоморфна ровно одной поверхности из следующего списка: сфера,тор, крендель, ... , сфера с g ручками, ... Эйлерова характеристика является полным инвариантом ориентированной поверхности, т.е. две ориентированные поверхности гомеоморфны тогда и только тогда, когда их эйлеровы характеристики совпадают.*

Теорема доказывалась в виде последовательной склейки данной поверхности из звезд вершин, полосок и заплат. При этом доказывались и использовались след. леммы.

Лемма 1 [о воротнике] *Звезда края ориентированной поверхности-с-краем ("воротник") гомеоморфна кольцу $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$.*

Лемма 2 [о штанах] *Приклеивание очередной полоски при построении поверхности равносильно приклеиванию штанов либо по талии, либо по штанинам.*

§2. Общая теорема классификации поверхностей

Теорема 2. *Любая поверхность (с краем или без) гомеоморфна ровно одной из следующих поверхностей: сфера с g ручками и h компонентами края, $g = 0, 1, 2, \dots$, $h = 0, 1, 2, \dots$ или связная сумма p экземпляров проективной плоскости с h компонентами края, $p = 1, 2, 3, \dots$, $h = 0, 1, 2, \dots$. Тройка чисел $(\omega, \xi(M), h)$, где $\omega = \pm 1$ в зависимости от ориентируемости или неориентируемости поверхности, $\xi(M)$ – ее эйлерова характеристика и h – число компонент края, является полной системой инвариантов поверхности-с-краем, т.е. две поверхности-с-краем гомеоморфны тогда и только тогда, когда эти тройки чисел у них совпадают.* (без док-ва!)

Лекция 5. ГОМОТОПИИ

§1. Гомотопные отображения

Гомотопия между двумя отображениями (обозначения $F : X \times [0,1] \to Y$ и $F_t : X \to Y$), гомотопность отображений ($f \simeq g$) как отношение эквивалентности, множество $[X, Y]$ гомотопических классов отображений из X в Y.

§2. Гомотопическая эквивалентность пространств

Определение гомотопической эквивалентности пространств ($X \simeq Y$), разбиение на классы гомотопической эквивалентности. Стягиваемость (как гомотопическая эквивалентность точке).

Теорема 1. *Если X стягиваемое и Y линейно связно, то любые два отображения из X в Y гомотопны.*

Теорема 2. *Если Y стягиваемое, то любые два отображения из X в Y гомотопны.*

§3. Степень отображения окружности в окружность

Экспоненциальное отображение $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$. Поднятие отображения $f : [0,1] \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, $f(0) = f(1) = 1$, до отображения $\widetilde{f} \to \mathbb{R}$. Определение степени

$$\mathrm{degf} := \frac{1}{2\pi}\widetilde{\mathrm{f}}(1).$$

Теорема 3. *Для любого непрерывного отображения f окружности в окружность соответствие $f \mapsto deg(f)$ порождает биекцию между гомотопическими классами отображений окружности в окружность и целыми числами:*

$$\boxed{[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{Z}}.$$

§4. Теорема Брауера

Определение ретракции пространства на его подмножество.

Лемма. *Двумерный диск нельзя ретрагировать на его граничную окружность.*

Теорема Брауера *У любого непрерывного отображения двумерного диска на себя есть неподвижная точка.*

Лекция 6. КРИВЫЕ НА ПЛОСКОСТИ

§1. Основные определения

Определение кривой $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$, касательного вектора к кривой, регулярной кривой (=кривой с непрерывно изменяющемся и нигде не обращающемся в ноль касательным вектором), иммерсированной кривой. Определение регулярной гомотопии. Ориентированные и не ориентированные регулярные кривые. Фокус Уитни (регулярная гомотопия, уничтожающая последовательно идущие и закрученные в противоположные стороны маленькие петли). Регулярная гомотопия окружности с двумя внешними петельками, удаляющая эти петли.

Гауссово отображение касательного вектора регулярной кривой. Индекс Уитни (определение через степень гауссового отображения).

Теорема 1. *Индекс Уитни регулярной кривой – инвариант регулярной гомотопии.*

§2. Теорема Уитни–Граустейна

Теорема 2. *Две регулярные кривые регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда у них одинаковые индексы Уитни.* (без док-ва, но эта теорема доказывалась на упражнениях, см. также брошюру *Topology-1*, стр.48)

§3. Степень точки относительно кривой

Определение степени $\mathrm{Deg}(x, \gamma)$ точки x лежащей в дополнении к иммерсированной кривой γ (через степень гауссового отображения, порожденного вращением вектора с началом в x при обходе его конца вокруг кривой).

Теорема 3. (i) *Если две точки лежат в одной компоненте связности дополнения к иммерсированной кривой, то их степени относительно этой кривой одинаковы.*

(ii) *Если точка x достаточно далека от кривой γ, то $\mathrm{Deg}(x, \gamma) = 0$.*

(iii) *Если две кривые γ_1, γ_2 и точка x вне них таковы, что угол между векторами с началами в x и с концами $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ меньше π при любом t, то $Deg(x, \gamma_1) = Deg(x, \gamma_2)$.*

Имеется следующий алгоритм вычисления $\mathrm{Deg}(x, \gamma)$: соединяем какую-нибудь далекую от γ точку с точкой x гладкой кривой трансверсальной к γ и при каждом проходе пути через γ прибавляем или вычитаем единицу в зависимости ор знака пересечения. На упражнениях доказывалось, что этот алгоритм корректен (не зависит от выбора пути).

§4. Основная теорема алгебры

Теорема 4. *Любой многочлен $p(z)$ степени $n > 0$ с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень.*

В доказательстве используется след. лемма:

Лемма. *При достаточно большом $R_0 > 0$, имеет место равенство $\mathrm{Deg}(0, f_{p,R_0}) = n$.*

Здесь $f_{p,R-0} : \varphi \mapsto p(R_0 e^{i\varphi})$ – кривая на плоскости комплексного переменного, а $0 \in \mathbb{C}$ рассматривается как точка этой плоскости.

Лекция 7. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

§1. Умножение петель и фундаментальная группа

В этой лекции рассматривается категория линейно связных топологических пространств с отмеченной точкой $\{(X, x_0)\}$. Определение петли и гомотопии петель, умножения гомотопических классов петель.

Теорема 1. *Множество $\pi_1(X, x_0)$ гомотопических классов петель относительно умножения петель представляет собой группу.*

§2. Индуцированный гомоморфизм и функториальность

Теорема 2. *Любому морфизму $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ линейно связных пространств с отмеченной точкой отвечает гомоморфизм $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ их фундаментальных групп.*

Теорема 3. *Фундаментальная группа – ковариантный функтор, т.е. выполняются следующие условия функториальности:*
(i) $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$;
(ii) $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X)}$.

§3. Роль базисной точки

Теорема 4. *Фундаментальные группы одного и того же линейно связного пространства с разными отмеченными точками изоморфны, но соответствующий изоморфизм не каноничен, он вообще говоря зависит от выбора пути, соединяющего отмеченные точки.*

§4. Гомотопическая инвариантность фундаментальной группы

Теорема 5. *Фундаментальные группы гомотопически эквивалентных линейно связных пространств изоморфны.*

Лекция 8. СВОЙСТВА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППЫ

§1. Кривая Пеано

Теорема 1. *Существует непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ на квадрат $[0,1]\times[0,1]$, а также окружности на двумерную сферу.*

§2. Симплициальная аппроксимация

Категория симплициальных пространств: определение симплициального пространства (=полиэдра) и симплициального отображения. Определение симплициальной аппроксимации непрерывного отображения симплициальных пространств.

Теорема 2. *Если ϕ – симплициальная аппроксимация непрерывного отображения f симплициальных пространств, то f и ϕ – гомотопны.*

Теорема 3. *Для любого непрерывного отображения f симплициальных пространств существует такое $N > 0$, что в N-кратных барицентрических подразделениях этих пространств найдется симплициальрая аппроксимация ϕ отображения f (гомотопная f).*

Теорема 3 позволяет получить следующее следствие "методом выдувания"(без этой теоремы этот метод не работает по причине эффекта типа крикой Пеано). **Следствие.** $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$ *при* $n \geq 2$.

§3. Клеточная аппроксимация

Определение категории конечных клеточных пространств (=конечных CW-комплексов), в частности определение клетки, k-мерного остова и морфизма (клеточного отображения).

Теорема 4. *Любое непрерывное отображение конечных клеточных пространств гомотопно клеточному.* (без док-ва!)

§4. Фундаментальной группа клеточного пространства

Теорема 5. *Фундаментальная группа линейно связного конечного клеточного пространства X живет в его двумерном остове $X^{(2)}$, т.е. $\pi_1(X) \cong \pi_1(X^{(2)})$.*

§5. Клеточное пространство с данной фундаментальной группой

Теорема 6. *Любая группа заданная конечным числом образующих и соотношений реализуется как фундаментальная группа некоторого двумерного клеточного пространства.*

На лекции была описана конструкция соотв. пространства и доказано, что выполняются данные соотношения, но не было полностью доказано, что фундаментальная группа построенного пространства изоморфна данной группе.

———————————————————————————————————-

Лекция 9. НАКРЫТИЯ

§1. Определение накрытия

В этой лекции вновь рассматривалась категория линейно связных топологических пространств с отмеченной точкой. Определение накрытия, базы, накрывающего пространства, слоя, морфизма накрытий. Определение категории накрытий над всеми линейно связными топологическими пространствами и категории накрытий над фиксированной базой.

Определение регулярного накрытия.

§2. Накрывающий путь

Определение накрывающего пути (=поднятие пути).

Лемма (о накрывающем пути) *Даны накрытие $p : E \to X$, точка $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ и путь (в частности петля) $\alpha : [0,1] \to X$ с началом в точке $x_0 = p(0)$. Тогда существует единственное накрытие $\widetilde{\alpha} : [0,1] \to E$, такое что $\widetilde{\alpha}(1) = e_0$.*

§3. Теорема о накрывающей гомотопии

Теорема 1 *(о накрывающей гомотопии) Даны накрытие $p : E \to X$, отображение $h : A \to X$, его поднятие $\widetilde{h} : A \to X$ и гомотопия $F_t : A \to X$ отображения h, $F_0 = h$. Тогда существует единственная гомотопия $\widetilde{F}_t : A \to E$, такая что $\widetilde{F}_0 = \widetilde{h}$ и $p \circ \widetilde{F}_t = F_t$.*

§4. Мономорфность индуцированного гомоморфизма

Теорема 2. *Гомоморфизм фундаментальных групп индуцированный накрытием – мономорфизм.*

———-

.

Лекция 10. ПОСТРОЕНИЯ НАКРЫТИЙ

§1. Существование накрытия с данной фундаментальной группой

Определение локально линейно связного и локально односвязного пространства.

Теорема 1. *Если $G \subset \pi_1(X)$ – подгруппа фундаментальной группы локально линейно связного и локально односвязного пространства X, то существует накрытие $p : E \to X$ с фундаментальной группой изоморфной G, притом p_* является изоморфизмом на G.*

§2. Единственность накрытия с данной фундаментальной группой

Теорема 2. *Если X линейно связно и локально линейно связно, то накрытие указанное в теореме 1 – единственно с точностью до изоморфизма в категории накрытий над X.*

§3. Универсальное накрытие

Определение универсального накрытия (как накрывающего пространства с тривиальной фундаментальной группой). Определение частичного порядка в категории накрытий над фиксированным линейно связном пространстве.

Теорема 2. *У линейно связного, локально линейно связного и локально односвязного пространства существует единственное (с точностью до изоморфизма в категории накрытий над X) универсальное накрытие.*

Теорема 3. *Накрытие над линейно связным, локально линейно связным и локально односвязным пространством X универсально тогда и только тогда, когда оно является максимальным элементом частичного порядка в категории накрытий над X.*

———-

Лекция 11. УЗЛЫ И ЗАЦЕПЛЕНИЯ

§1. Изотопия узлов и зацеплений

Определения (кусочно-линейных) узлов, зацеплений и их изотопий (через треугольные сдвиги), диаграммы узлов и зацеплений, в частности тривиального узла, трилистника, восьмерки, зацепления Уайтхеда, колец Борромео. Определение узлов, лежащих в коробках и их изотопических классов. Определение гладких узлов.

Теорема 1. *Имеется естественная биекция между изотопическими классами узлов и изотопическими классами узлов, лежащими в коробках.*

Теорема 2. *Имеется биекция между изотопическими классами (кусочно-линейных) узлов и классами эквивалентности гладких узлов, где под эквивалентностью понимается наличие гомеоморфизма $\mathbb{R}^3$, неподвижного вне некоторого компакта и переводящего один гладкий узел в другой.* (без док-ва!)

§2. Арифметика узлов

Определение композиции (=связной суммы) узлов в коробках, определение простых узлов.

Теорема 3. *Узлы образуют коммутативную полугруппу без обратных элементов с единственным (с точностью до порядка) разложением на простые узлы.* (без док-ва!)

§3. Фундаментальная группа узла

Определение фундаментальной группы узла. Алгоритм вычисления группы узла (точнее – ее представления образующими и соотношениями) по диаграмме узла.

Теорема 4. *Фундаментальная группа тривиального узла изоморфна* $\mathbb{Z}$, *а фундаментальная группа трилистника задается как* $\langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$. *Эта группа не коммутативна, а значит трелистник нельзя распутать (он не изотопен тривиальному узлу).*

Теорема 5. *Фактор по коммутанту фундаментальной группы любого узла изоморфен группе* $\mathbb{Z}$.

§4. Полином Конвея

Аксиоматика полинома Конвея (включая *skein relation* Конвея) и алгоритм его вычисления ("метод маленькой красной окружности") по диаграмме узла (или зацепления). (Существование полинома удовлетворяющего аксиомам не доказывалось.)

§5. Операции Рейдемейстера

Определение операций Рейдемейстера $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

Лемма Рейдемейстера. *Две диаграммы узлов изотопны тогда и только тогда, когда одну в другую можно перевести с помощью конечного числа операций Рейдемейстера.*

Лекция 12. ПОЛИНОМ ДЖОНСА

§1. Построение скобки Кауфмана

Определение скобки Кауфмана неориентированных диаграмм узлов и зацеплений, A-углы и B-углы при точки скрещивания, состояние $s \in S$ диаграммы (как выбор A- или B-угла в каждой точки скрещивания) и соответствующие значения $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$:

$$\langle L \rangle := \sum_{s \in S} a^{\alpha(s)} b^{\beta(s)} c^{\gamma(s)-1} \in \mathbb{Z}[a, b, c].$$

§2. Свойства скобки Кауфмана

Теорема 1. *Скобка Кауфмана обладает след. свойствами:*
(i) $\langle \bigcirc \rangle = 1$
(ii) $\langle L \sqcup \bigcirc \rangle = c \cdot \langle L \rangle$;
(iii) *выполняется skein relation Кауфмана.*

Теорема 2. *Скобка Кауфмана инвариантна относительно операций Рейдемейстера* Ω_2 *и* Ω_3, *при условии что в ней положено* $b = a^{-1}$ *и* $c = -a^2 - a^{-2}$.

Теорема 3. *Скобка Кауфмана при операции Рейдемейстера* Ω_1 *умножается на* $-a^{\pm 3}$ *в зависимости от типа удаляемой петельки.*

§2. Построение полинома Джонса

Определение (для *ориентированных* узлов и зацеплений) целочисленной характеристики $wr(L)$ (*writhe*). Определение полинома Джонса в форме Кауфмана для ориентированных зацеплений (и узлов) L:

$$X(L) := (-a)^{-3wr(L)} \langle |L| \rangle,$$

где $|L|$ – зацепление L без ориентации.

Определение полинома Джонса $V(L)$ (замена $q = a^4$ в $X(L)$).

Теорема 4. *Полином Джонса инвариантен относительно всех трех операций Рейдемейстера и поэтому является инвариантом изотопии узлов и зацеплений.*

§3. Аксиоматика полинома Джонса и теорема единственности

Аксиомы (свойства) I – IV полинома Джонса.

Теорема 5. *Существует единственный полином* $V(L) \in \mathbb{Z}[q^{-1/2}, q^{1/2}]$ *удовлетворяющий аксиомам* I – IV. (без док-ва на лекции, но доказательство, возможно, обсуждалось на упражнениях.)

§3. Свойства полинома Джонса

Теорема 6. *Полином Джонса обладает след. свойствами:*

$$\text{(i)} \quad \mathrm{V}(\mathrm{L}_1 \# \mathrm{L}_2) = \mathrm{V}(\mathrm{L}_1) \cdot \mathrm{V}(\mathrm{L}_2);$$

$$\text{(ii)} \quad \mathrm{V}(\mathrm{L}_1 \sqcup \mathrm{L}_2) = -(\mathrm{q}^{-1/2} + \mathrm{q}^{1/2}) \mathrm{V}(\mathrm{L}_1) \cdot \mathrm{V}(\mathrm{L}_2);$$

$$\text{(iii)} \quad \mathrm{V}_{\mathrm{K}^*}(\mathrm{q}) = \mathrm{V}_{\mathrm{K}}(\mathrm{q}^{-1}),$$

если K^* – зеркальный образ узла K.

———

-