

**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 9.**  
**Геодезические. 9.04.2012.**

**Задача 1.** Построить пример такого связного риманова многообразия  $M$  и точки  $A \in M$ , что экспоненциальное отображение  $\exp_A : T_A M \rightarrow M$  не является

- сюръективным,
- инъективным.

**Задача 2.** Докажите, что в геодезических координатах, центрированных в точке  $p$ , символы Кристоффеля в точке  $p$  обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

Докажите, что центрированные в точке  $p$  координаты  $x^1, \dots, x^n$ , определённые в окрестности  $U$ , являются геодезическими координатами, центрированными в точке  $p$ , тогда и только тогда, когда  $\Gamma_{jk}^i x^j x^k \equiv 0$  тождественно по  $x^1, \dots, x^n$  в  $U$ . *Указание. Обратите внимание на то, что в геодезических координатах, центрированных в точке  $p$ , геодезические, проходящие через точку  $p$ , имеют вид  $x^i = a^i t$ .*

**Задача 3.** Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского как непараметризованные кривые. Можно взять любую из моделей плоскости Лобачевского, например верхнюю полуплоскость с метрикой  $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ . *Указание. Найдите два интеграла исходной системы из двух дифференциальных уравнений второго порядка и используйте их для понижения порядка. Вы получите два уравнения, дающие  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{dy}{dt}$ . Выпишите тогда уравнение для  $\frac{dy}{dx}$  и решите его.*

**Задача 4.** Докажите, что в полугеодезических координатах  $x^1, \dots, x^n$ , то есть в таких координатах, в которых метрика имеет вид

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n-1} g_{ij} dx^i dx^j + (dx^n)^2,$$

кривые  $x^1 = \text{const}, \dots, x^{n-1} = \text{const}$  являются геодезическими с параметром  $t = x^n$ .

**Задача 5.** Докажите, что геодезическая  $\exp_p(tv)$  и геодезическая сфера  $\exp_p(S_\delta)$ , где  $S_\delta = \{v \in T_p M \mid |v| = \delta\}$ , всегда ортогональны друг другу. Как при помощи этого наблюдения ввести полугеодезические координаты в окрестности точки  $p$ ?

**Задача 6.** Докажите, что геодезические в  $\mathbb{R}^n$  (с евклидовой метрикой) не имеют сопряжённых точек.

**Задача 7.** Докажите, что северный и южный полюс сферы  $\mathbb{S}^n$  являются сопряжёнными точками вдоль дуги большого круга кратности  $n - 1$ .

**Задача 8.** Найдите явно якобиевы поля вдоль геодезических на сфере  $\mathbb{S}^n$  в подходящем базисе векторных полей.

**Задача 9.** Докажите, что северный и южный полюс сферы  $\mathbb{S}^n$  являются сопряжёнными точками вдоль дуги большого круга кратности  $n - 1$ .

**Задача 10.** Докажите, что на многообразии отрицательной секционной кривизны геодезические не содержат сопряжённых точек.