2. АЛГЕБРА КОМПЛЕКСОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ МАЙЕРА–ВИЕТОРИСА

Задача 1 (5-лемма)**.** Дана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{i} & E \\ p\downarrow & & q\downarrow & & r\downarrow & & s\downarrow & & t\downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{i'} & E' \end{array}$$

В этой диаграмме строки — точные последовательности, q и s — изоморфизмы, p — эпиморфизм, t — мономорфизм. Докажите, что r — изоморфизм.

Задача 2. Докажите, что если последовательность абелевых групп $A \xrightarrow{p} B \xrightarrow{q} C \to 0$ точна, то для всякой абелевой группы G последовательность $A \otimes G \xrightarrow{p\otimes\mathrm{id}} B \otimes G \xrightarrow{q\otimes\mathrm{id}} C \otimes G \to 0$ точна.

Задача 3. а) Пусть $\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$ — комплекс абелевых групп, в котором $C_i = \mathbb{Z}^{k_i}$ для всех i, а $\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} \tilde{C}_i \xrightarrow{\partial_i} \tilde{C}_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} \tilde{C}_0 \longrightarrow 0$ комплекс векторных пространств, в котором $\tilde{C}_i = \mathbb{R}^{k_i}$ для всех i, а дифференциалы те же самые (задаются теми же матрицами в стандартных базисах). Докажите, что если $H_i(C) = \mathbb{Z}^{\beta_i} \oplus G_i$, где G_i — конечная абелева группа (кручение), то $H_i(\tilde{C}) = \mathbb{R}^{\beta_i}$. б) Пусть G — произвольная абелева группа. Докажите, что $H_i(C, G)$ содержит $H_i(C, \mathbb{Z})$ в качестве прямого слагаемого, причем это вложение естественно (коммутирует с отображениями f_*, где f — произвольный морфизм комплексов).

Задача 4. Пусть $\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$ — цепной комплекс свободных абелевых групп. Рассмотрим последовательность $\dots \xleftarrow{\partial^*_{i+1}} C^*_i \xleftarrow{\partial^*_i} C^*_{i-1} \xleftarrow{\partial^*_{i-1}} \dots \xleftarrow{\partial^*_1} C^*_0 \longleftarrow 0$, в котором $C^*_i = \mathrm{Hom}(C_i, \mathbb{Z})$. а) Докажите, что эта последовательность является коцепным комплексом. б) Докажите, что если $H_i(C) = \mathbb{Z}^{\beta_i} \oplus G_i$, где G_i — конечная абелева группа, то $H^i(C^*) = \mathbb{Z}^{\beta_i} \oplus G'_i$, где группа G'_i также конечна. Приведите пример, когда группы G_i и G'_i не совпадают.

Задача 5. а) Двумерный тор X это объединение двух цилиндров A и B, пересекающихся по обоим основаниям. Вычислите в данной ситуации последовательность Майера–Виеториса. б) Бутылка Клейна K также получается склеиванием двух цилиндров по основаниям, но одно из оснований приклеивается с перекруткой. Выпишите последовательность Майера–Виеториса и докажите, что $H_2(K) = 0$. Можно ли вычислить $H_1(K)$, исходя из этой последовательности?

Задача 6. Пусть $X = S^3$, $K \subset X$ — гладкая замкнутая несамопересекающаяся кривая (узел), $A \subset X$ — тонкая трубка вокруг K (гомеоморфная полноторию), $B \subset X$ — замыкание $X \setminus A$. Вычислите последовательность Майера–Виеториса для разбиения $X = A \cup B$ в случае, когда а) K — незаузленная окружность; б) K — узел “трилистник”.

Указание. В задаче 6а представьте S^3 как $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, а K — как $\ell \cup \{\infty\}$, где $\ell \subset \mathbb{R}^3$ — прямая.