1. КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ЛИ

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Обозначим $C^k(\mathfrak{g}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(\Lambda^k\mathfrak{g}, \mathbb{C})$, т.е. векторное пространство k-линейных кососимметричных функционалов на $\mathfrak{g}$ со значениями в $\mathbb{C}$. Оператор $d_k : C^k(\mathfrak{g}) \to C^{k+1}(\mathfrak{g})$ определяется формулой $dc(x_1, \dots, x_{k+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^{i+j+1}c([x_i, x_j], x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{k+1})$, где $c \in C^k(\mathfrak{g})$.

Задача 1. Докажите, что это — коцепной комплекс, т.е. $dc \in C^{k+1}(\mathfrak{g})$ и $d_{k+1} \circ d_k = 0$.

Задача 2. Вычислите когомологии этого комплекса в случае, когда а) $\mathfrak{g}$ — двумерная алгебра Ли с нулевым коммутатором; б) $\mathfrak{g}$ — алгебра Гейзенберга, т.е. трехмерная алгебра Ли с базисом $a, a^\dagger, c$ и коммутатором $[a, a^\dagger] = c$, $[c, a] = [c, a^\dagger] = 0$; в) $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2$, т.е. алгебра матриц 2×2 с нулевым следом.

Указание (к пункту 2в)**.** Базис в $\mathfrak{sl}_2$ составляют матрицы $e \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $h \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Выпишите вначале коммутаторы базисных элементов.

Пусть теперь $\widetilde{\mathfrak{g}}$ — одномерное центральное расширение алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т.е. векторное пространство $\mathfrak{g}\oplus\mathbb{C} = \mathfrak{g} \oplus \langle c\rangle$, где $[c, x] = 0$ для всякого $x \in \mathfrak{g}$, а проекция $\pi : \widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$, тождественная на $\mathfrak{g} \subset \widetilde{\mathfrak{g}}$ и переводящая $c \mapsto 0$, является гомоморфизмом алгебр Ли.

Задача 3. а) Докажите, что существует такая фукнция $u : \Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, что $[x, y]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} = [x, y]_{\mathfrak{g}} + u(x, y)c$, и что $du = 0$ в описанном выше комплексе (u является 2-коциклом). б) Пусть $\iota : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ — гомоморфизм алгебр Ли такой, что $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, и пусть $\mathfrak{g}' = \iota(\mathfrak{g})$. Докажите, что коцикл u' алгебры Ли $\mathfrak{g}'$ отличается от коцикла u, описанного выше, на кограницу. в) Докажите, что коцикл u когомологичен нулю тогда и только тогда, когда $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}$ как алгебра Ли.

Задача 4. Пусть $\mathfrak{sl}_2^{S^1,\mathrm{pol}}$ — множество отображений $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \to \mathfrak{sl}_2$ вида $f(z) = \sum_{n=p}^q u_n z^n$, где $u_n \in \mathfrak{sl}_2$ и $p, q \in \mathbb{Z}$. Коммутатор $[f, g](z) \stackrel{\text{def}}{=} [f(z), g(z)]$ превращает $\mathfrak{sl}_2^{S^1,\mathrm{pol}}$ в алгебру Ли (называемую алгеброй токов). а) Докажите, что функция $u(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{S^1} \mathrm{Tr}(f(z)g'(z))\, dz$ является 2-коциклом на алгебре токов. б) Докажите, что этот коцикл не когомологичен нулю. Соответствующее центральное расширение алгебры токов называется алгеброй Каца–Муди.