ЛЕКЦИИ 9–10

Краткое содержание. Двойственность Пуанкаре.

Подпространства $A, B \subset V$ линейного пространства V называются трансверсальными, если $V = A + B$ (сумма не обязательно прямая!). Пусть M, N — многообразия; говорят, что гладкое отображение $f : N \to M$ трансверсально подмногообразию $S \subset M$, если для каждой точки $x \in N$ такой, что $f(x) \in S$ трансверсальны подпространства $T_x S$ и $f'(x)T_x N$ в пространстве $T_x M$. В частности, подмногообразия $N_1, N_2 \subset M$ называются трансверсальными, если отображение вложения $\iota : N_1 \to M$ трансверсально N_2.

Для гладкой функции $f : M \to \mathbb{R}$ на многообразии M обозначим $J_1(f) : M \to \mathbb{R} \times T^*M$ отображение, действующее по формуле $J_1(f)(a) = (f(a), df(a))$ (отображение называется 1-струей функции f).

Теорема (Тома о трансверсальности, частный случай). *Для произвольного подмногообразия $S \subset \mathbb{R} \times T^*M$ множество гладких функций $f : M \to \mathbb{R}$ таких, что отображение $J_1(f)$ трансверсально S, всюду плотно в C^1-топологии в множестве всех гладких функций на M.*

Обобщение теоремы. *Пусть $k \ge 1$ — натуральное число, и $S \subset (\mathbb{R} \times T^*M)^k$ — гладкое подмногообразие такое, что его образ при проекции $p \times \dots \times p : (\mathbb{R} \times T^*M)^k \to M^k$ не пересекает диагонали $\mathrm{Diag}_k = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_i = a_j$ для некоторых i и $j\}$. Тогда множество гладких функций $f : M \to \mathbb{R}$ таких, что отображение $J_1(f) \times \dots \times J_1(f) : M^k \setminus \mathrm{Diag}_k \to (\mathbb{R} \times T^*M)^k$ трансверсально S, всюду плотно в C^1-топологии в множестве всех гладких функций на M.*

Доказывать теорему Тома мы не будем (доказательство не очень сложное, но длинное и к топологии прямого отношения не имеет...).

Следствие 1. *Множество функций Морса плотно (в C^1-топологии) в множестве гладких функций на любом компактном многообразии.*

Уточнение следствия. *Множество функций Морса с попарно различными критическими значениями плотно (в C^1-топологии) в множестве гладких функций на любом компактном многообразии.*

Доказательство следствия. В качестве подмногообразия $S \subset \mathbb{R} \times T^*M$ выберем $\mathbb{R} \times \{0\}$ (график нулевого сечения кокасательного расслоения к M). Размерности: $\dim M = n$, $\dim \mathbb{R} \times T^*M = 2n + 1$, $\dim S = n + 1$. Согласно теореме Тома множество функций $f : M \to \mathbb{R}$ таких, что $J_1(f) = (f, df)$ трансверсальна к S, всюду плотно. Утверждение, что $J_1(f)(a) \in S$ означает, что $df(a) = 0$, т.е., a — критическая точка функции f.

Введем на многообразии M локальные координаты $x_1, \dots, x_n$ в окрестности точки a (координаты которой все равны нулю). Тогда на $\mathbb{R} \times T^*M$ есть стандартные координаты $\alpha, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ (α — координата в $\mathbb{R}$, а $p_1, \dots, p_n$ — коэффициенты разложения ковектора по базису $dx_1, \dots, dx_n$). Производная $J_1(f)'(a) : T_a M \to T_{(f(a),df(a))}(\mathbb{R} \times T^*M)$ — линейный оператор, действующий на стандартный базис $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ в $T_a M$ по формуле $J_1(f)'(a)(\frac{\partial}{\partial x_k}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)\frac{\partial}{\partial p_j}$. Пространство $T_{(f(x),df(x))}S$ порождено векторами $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Поэтому $J_1(f)$ трансверсальна к S в точке a (т.е. $J_1(f)'(a)(T_x M) + T_{(f(x),df(x))}S = T_{(f(x),df(x))}J_1 M)$ тогда и только тогда, когда матрица $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ обратима. □

Уточнение следствия вытекает из обобщенной теоремы Тома; доказательство — упражнение.

Пусть теперь M — многообразие, $N \subset M$ — подмногообразие, Δ_k — стандартный k-мерный симплекс.

Лемма 1. *Пусть $F_0 : \Delta_k \to M$ — непрерывное отображение, $f_t : \partial\Delta_k \to M$ — гомотопия ($0 \le t \le 1$), для которой $F_0|_{\partial\Delta_k} = f_0$, а ограничение отображения f_1 на каждую грань Δ_k — гладкое отображение, трансверсальное подмногообразию N. Тогда существует гомотопия $F_t : \Delta_k \to M$, для которой $F_t|_{\partial\Delta_k} = f_t$ для всех $0 \le t \le 1$ и F_1 — гладкое отображение, трансверсальное подмногообразию N.*

Доказательство этой технической леммы — упражнение на применение теоремы Тома.

Следствие 2. *Пусть $\tilde{C}_n^N(M, \mathbb{Z})$ — множество сингулярных цепей $\sum_\sigma k_\sigma \sigma$, в которых все сингулярные симплексы $\sigma : \Delta_n \to M$ гладкие и трансверсальны подмногообразию $N \subset M$ (имеется в виду, что ограничение σ на множество внутренних точек любой грани — гладкое отображение этого множества в M, трансверсальное N). Тогда $\tilde{C}_n^N$ является подкомплексом сингулярного комплекса многообразия M, и отображение включения $\iota : \tilde{C}^N_\cdot(M, \mathbb{Z}) \to C_\cdot(M, \mathbb{Z})$ порождает изоморфизм в гомологиях всех размерностей.*

Элементы множества $\tilde{C}_n^N(X,\mathbb{Z})$ будем называть гладкими сингулярными цепями, трансверсальными N.

Доказательство следствия. То, что $\tilde{C}^N_\cdot$ — подкомплекс в $C_\cdot(M)$, вытекает непосредственно из определения дифференциала в цепном комплексе.

Пусть $a=\sum_\sigma k_\sigma\sigma$ — цикл в $C_n(M,\mathbb{Z})$. Применяя лемму по индукции с ограничениям σ на грани стандартного симплекса возрастающей размерности, построим гомотопии σ_t, $0\le t\le 1$, всех $\sigma\stackrel{\text{def}}{=}\sigma_0$, делающие их гладкими и трансверсальными к N и согласованные на пересечениях (т.е. если σ и τ совпадают на какой-либо грани стандартного симлекса, то это верно и для σ_t и τ_t при всех t).

Цепь $a_1=\sum_\sigma k_\sigma\sigma_1$ принадлежит $\tilde{C}_n^N(M,\mathbb{Z})$. Поскольку $0=\partial a=\sum_\sigma k_\sigma\partial\sigma=\sum_{\sigma,\tau}k_\sigma\ell_{\sigma,\tau}\tau$, а $C_n(M,\mathbb{Z})$ — свободный модуль, это означает, что $\sum_\sigma k_\sigma\ell_{\sigma,\tau}=0$ для любого сингулярного симплекса τ. Следовательно, $\partial a_1=\sum_{\sigma,\tau}k_\sigma\ell_{\sigma,\tau}\tau_1=0$, то есть a_1 — цикл. Применяя конструкцию цепной гомотопии из теоремы 1 лекции 1, получим, что $a-a_1=\partial u$ для некоторой сингулярной цепи u. Отсюда вытекает, что ι_* — эпиморфизм.

Пусть теперь $\iota_*a=0$, т.е. $a=\sum_\sigma k_\sigma\sigma$ — цикл из $\tilde{C}_n^N(M,\mathbb{Z})$, и $a=\partial u$ для некоторой цепи $u=\sum\ell_\tau\tau$ из $C_n(M,\mathbb{Z})$. Согласно лемме, для каждого τ существует гомотопия τ_t такая, что все τ_1 гладкие, трансверсальны N, и гомотопии согласованы на пересечениях и неподвижны на тех гранях, ограничение на которые дает сингулярные симплексы σ, входящие в a. Отсюда $a=\partial u_1$, где $u_1=\sum_\tau\ell_\tau\tau_1$ — цепь из $\tilde{C}_n^N(M.\mathbb{Z})$, и ι_* — мономорфизм. □

Пусть M — ориентированное компактное многообразие размерности n, $N\subset M$ — ориентированное подмногообразие размерности k, а $a\sum_\sigma k_\sigma\sigma$ — гладкий сингулярный цикл размерности $n-k$, трансверсальный к N вместе со своими ограничениями на грани стандартного симплекса. Отображение многообразия размерности, меньшей $n-k$, трансверсально N тогда и только тогда, когда N не пересекает образ отображения; таким образом, все точки $x\in\Delta_n$ такие, что $\sigma(x)\in N$, лежат внутри Δ_n, и таких точек, по теореме о неявной функции, конечное число. Для каждой такой точки a определим знак $\operatorname{sgn}(a)$: зафксируем в $T_{\sigma(x)}N$ базис $u_1,\dots,u_k$, определяющий выбранную ориентацию N; также определим в пространстве $\mathbb{R}^{n-k}=T_x\Delta_{n-k}$ базис $v_1,\dots,v_{n-k}$, задающий стандартную ориентацию. Поскольку σ трансверсально к N, векторы $\sigma'(v_1),\dots,\sigma'(v_{n-k}),u_1,\dots,u_k$ образуют базис в $T_{\sigma(x)}M$. Положим $\operatorname{sgn}(x)=+1$, если ориентация этого базиса совпадает с выбранной ориентацией M, и $\operatorname{sgn}(x)=-1$ в противном случае. Целое число $\infty(a,N)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_\sigma k_\sigma\sum_{x:\sigma(x)\in N}\operatorname{sgn}(x)$ называется индексом пересечения цикла a и многообразия N.

Лемма 2. *Если $a=\partial u$, то $\infty(a,N)=0$ для любого N.*

Доказательство. Пусть $u=\sum_\tau\ell_\tau\tau$, где $\tau:\Delta_{n-k+1}\to M$ — сингулярные симплексы. Без ограничения общности можно считать, что все τ трансверсальны к N и, следовательно, $\{x\in\Delta_{n-k+1}\mid\tau(x)\in N\}$ — одномерное многообразие с краем, то есть совокупность нескольких замкнутых и нескольких незамкнутых кривых. Дальнейшие рассуждения полностью повторяют теорему 1 лекции 6 прошлого семестра. □

Для дальнейшего нам понадобится

Лемма 3. *Пусть X — клеточное пространство с конечным числом клеток, а F — произвольное поле. Тогда $H^k(X,F)$ естественно изоморфно $H_k^*(X,F)$*

Здесь звездочка означает двойственное векторное пространство, а слово “естественно” — то, что для любого непрерывного отображения $f:X\to Y$ линейные операторы $f_*:H_k(X,F)\to H_k(Y,F)$ и $f^*:H^k(Y,F)\to H^k(X,F)$ сопряжены друг другу.

Доказательство. Поскольку пространства $C_k(X,F)$ и $C^k(X,F)$ в цепном и коцепном клеточном комплексе конечномерны, по определению $C^k(X,F)=(C_k(X,F))^*$. Дифференциалы ∂ и δ — сопряженные операторы. Тогда $\operatorname{Ker}\delta_n$ — аннулятор $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$, а $\operatorname{Im}\delta_{n-1}$ — аннулятор $\operatorname{Ker}\partial_n$. Отсюда вытекает утверждение леммы. □

Лемма 2 позволяет определить индекс $i(a,N)$ для циклов a, сингулярные симплексы которых не обязательно трансверсальны N. Действительно, согласно следствию 2, существует цикл b, гомологичный a и трансверсальный к N. Если имеются два таких цикла, b_1 и b_2, то они гомологичны a и, следовательно, друг другу: $b_2=b_1+\partial v$. Выражение $\infty(b,N)$, очевидно, линейно по b, откуда $\infty(b_2,N)=\infty(b_1,N)+\infty(\partial v,N)=\infty(b_1,N)$, согласно лемме 2. Тем самым можно положить $\infty(a,N)\stackrel{\text{def}}{=}\infty(b,N)$. Из леммы 2 вытекает также, что индекс $\infty(a,N)$ зависит только от класса гомологий $[a]\in H_{n-k}(M,\mathbb{Z})$. Согласно следствию 1 из лекции 7–8 и следствию 1, M гомотопически эквивалентно клеточному комплексу с конечным числом клеток. Заменяя $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Q}$ и применяя лемму 3, получим, что каждое ориентированное подмногообразие N размерности k определяет линейный функционал на $H_{n-k}(M,\mathbb{Q})$, то есть элемент $\mathcal{D}N\in H^{n-k}(M,\mathbb{Q})$. $\mathcal{D}N$ называется классом когомологий, двойственным по Пуанкаре к многообразию N.

Пусть теперь a_1,a_2 — циклы размерностей k и $n-k$ в ориентированном многообразии M размерности n. Тогда определен цикл $a_1\times a_2$ размерности n в M^2. Положим по определению $\infty(a_1,a_2)\stackrel{\text{def}}{=}\infty(a_1\times a_2,\operatorname{Diag})$, где Diag $\stackrel{\text{def}}{=} \{(a,a) \in M^2 \mid a \in M\}$ (диагональ декартова квадрата). Из леммы 2 вытекает, что $\infty(\cdot,\cdot)$ – билинейная форма (называемая индексом пересечения) на $H_k(M,\mathbb{Q}) \otimes H_{n-k}(M,\mathbb{Q})$.

Если M — многообразие с краем, то класс $\mathcal{D}N$ определен, если $\partial N \subset \partial M$. Поэтому индекс пересечения становится билинейной формой на $H_k(M,\partial M,\mathbb{Q}) \otimes H_{n-k}(M,\mathbb{Q})$.

Пример 1. Пусть M — n-мерный шар с границей ∂M. Тогда $H_k(M,\partial M) = \mathbb{Z}$ при $k = n$ и равно нулю при остальных k, а $H_k(M) = \mathbb{Z}$ при $k = 0$ и равно нулю при остальных k. Тем самым индекс пересечения определен только для $H_n(M,\partial M,\mathbb{Q}) \otimes H_0(M,\mathbb{Q})$ и представляет собой, как легко убедиться из определения, умножение $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. Двойственным по Пуанкаре к нульмерному многообразию — точке — является класс n-когомологий, сопоставляющий единицу циклу M — сингулярному симплексу $(\Delta_n,\partial\Delta_n) \to (M,\partial M)$, представляющему собой тождественное отображение.

Теорема 1. *Пусть M — компактное ориентированное многообразие без края. Тогда индекс пересечения невырожден, т.е. определяет изоморфизм $H_k(M,\mathbb{Q}) \to H^{n-k}(M,\mathbb{Q})$.*

Для доказательства нам потребуется

Утверждение из гомологической алгебры 4 (5-лемма)**.** *Пусть имеется коммутативная диаграмма модулей над произвольным кольцом*

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{i} & E \\
{\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle r}\downarrow & & {\scriptstyle s}\downarrow & & {\scriptstyle t}\downarrow \\
A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{i'} & E'
\end{array},$$

в которой строки — точные последовательности, q и s — изоморфизмы, p — эпиморфизм, t — мономорфизм. Тогда r — изоморфизм.

Доказательство. Пусть $r(c) = 0$ для некоторого $c \in C$. Тогда $s(h(x)) = h'(r(x)) = 0$. Поскольку s — изоморфизм, $h(x) = 0$. В силу точности верхней строки существет $b \in B$ такой, что $g(b) = c$. Тогда $g'(q(b)) = h(g(b)) = h(c) = 0$. В силу точности нижней строки существует $a' \in A'$ такой, что $f'(a') = q(b)$, а поскольку p — эпиморфизм, $a' = p(a)$ для некоторого $a \in A$. Тогда $q(f(a)) = f'(p(a)) = f'(a') = q(b)$. Поскольку q — изоморфизм, $f(a) = b$, откуда $c = g(b) = g(f(a)) = 0$ в силу точности верхней строки. Таким образом, r — мономорфизм.

Пусть $c' \in C$ — произвольный элемент. Поскольку s — изоморфизм, существует $d \in D$ такой, что $s(d) = h'(c')$. Тогда $t(i(d)) = i'(s(d)) = i'(h'(c)) = 0$ в силу точности нижней строки. Поскольку t — мономорфизм, $i(d) = 0$. В силу точности верхней строки найдется $c_0 \in C$ такой, что $d = h(c_0)$. Теперь $s(h(c_0)) = s(d) = h'(c')$ и, с другой стороны, $s(h(c_0)) = h'(r(c_0))$. Следовательно, $h'(c' - r(c_0)) = 0$, и в силу точности нижней строки существует $b' \in B'$ такой, что $c' = r(c_0) + g'(b')$. Поскольку q — изоморфизм, существует $b \in B$ такой, что $q(b) = b'$. Тогда $r(g(b)) = g'(q(b)) = g'(b') = c' - r(c_0)$, откуда $c' = r(c_0 + g(b))$. Таким образом, r — эпиморфизм. □

Доказательство теоремы 1. Согласно уточненному варианту следствия 1, на M существует функция Морса f с попарно различными критическими значениями $\mu_1,\dots,\mu_q$. Выберем некритические значения $c_1,\dots,c_{q+1}$ так, чтобы $c_1 < \mu_1 < c_2 < \dots < \mu_q < c_{q+1}$ и докажем индукцией по j, что индекс пересечения определяет изоморфизм $H_*(f^{-1}((-\infty,c_j]), f^{-1}(c_j))$ и $H^*(f^{-1}((-\infty,c_j]))$ — при $j = q+1$ получим утверждение теоремы.

База индукции ($j = 1$) очевидна, поскольку $f^{-1}((-\infty,c_1]) = \varnothing$. При $j = 2$ получаем, согласно теореме о приклеивании клетки, утверждение примера 1.

Пусть теперь для некоторого j утверждение доказано. Обозначим $L_j = f^{-1}((-\infty,c_j])$, $R_j = f^{-1}([c_j,+\infty))$, $N_j = f^{-1}(c_j)$ и аналогично (с заменой $j \mapsto j+1$) L_{j+1}, R_{j+1} и N_{j+1}. Пусть также $Q = f^{-1}([c_j,c_{j+1}])$. Рассмотрим теперь диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots\to H_{k+1}(L_{j+1}/L_j) & \to & H_k(L_j) & \to & H_k(L_{j+1}) & \to & H_k(L_{j+1}/L_j) & \to & H_{k-1}(L_j)\to\dots \\
\downarrow{\scriptstyle (1)} & & \downarrow{\scriptstyle (2)} & & | & & \downarrow{\scriptstyle (1)} & & \downarrow{\scriptstyle (2)} \\
H^{n-k-1}(R_j/R_{j+1}) & & H^{n-k}(L_j/N_j) & & |{\scriptstyle (3)} & & H^{n-k}(R_j/R_{j+1}) & & H^{n-k+1}(L_j/N_j) \\
\| & & \| & & \downarrow & & \| & & \| \\
\dots\to H^{n-k-1}(Q/N_{j+1}) & \to & H^{n-k}(L_{j+1}/Q) & \to & H^{n-k}(L_{j+1}/N_{j+1}) & \to & H^{n-k}(Q/N_{j+1}) & \to & H^{n-k+1}(L_{j+1}/Q)\to\dots
\end{array}$$

Ее верхняя строка — точная гомологическая последовательность пары (L_{j+1},L_j) (с коэффициентами в $\mathbb{Q}$, дальше это будет подразумеваться). Нижняя строка — точная когомологическая последовательность тройки (L_{j+1},Q,N_{j+1}). Знаки равенства между элементами нижней и средней строки — изоморфизмы, вытекающие из гомотопической инвариантности когомологий.

Вертикальные стрелки между первой и второй строкой — это отображения, задаваемые индексом пересечения (билинейная форма является отображением пространства в двойственное). По предположению индукции стрелки, помеченные (1) — изоморфизмы.

Функция f имеет на уровне μ_j критическую точку с индексом λ. Согласно теореме о приклеивании клетки, $H_k(L_{j+1}/L_j) = \mathbb{Q}$ при $k = \lambda$ и равно нулю при прочих k. С другой стороны, для функции $-f$ та же критическая точка имеет индекс $n - \lambda$, откуда $H^{n-k}(R_j/R_{j+1}) = \mathbb{Q}$ при $k = \lambda$ и равно нулю иначе. Тем самым стрелки, помеченные (2), тоже изоморфизмы. Из 5-леммы теперь вытекает, что стрелка, помеченная (3) — также изоморфизм, и шаг индукции выполнен. □

Пусть теперь $N_1, N_2 \subset M$ — ориентированные подмногообразия размерностей n_1 и n_2, пересекающиеся трансверсально. Тогда по теореме о неявной функции их пересечение — ориентированное подмногообразие $N = N_1 \cap N_2 \subset M$ размерности $n = n_1 + n_2 - m$.

Теорема 2. $\mathcal{D}N_1 \cup \mathcal{D}N_2 = \mathcal{D}N$.

Доказательство. Пусть a_1, a_2 — циклы в M размерностей $m-n_1$ и $m-n_2$ соответственно. Непосредственно из определения двойственности Пуанкаре следует, что $\langle \mathcal{D}(N_1 \times N_2), a_1 \times a_2 \rangle = (-1)^{(m-n_1)(m-n_2)} \langle \mathcal{D}N_1, a_1 \rangle \langle \mathcal{D}N_2, a_2 \rangle$, где в левой части имеется в виду двойственность Пуанкаре в многообразии M^2. Отсюда и из теоремы 1 вытекает, что $\mathcal{D}(N_1 \times N_2) = \mathcal{D}N_1 \times \mathcal{D}N_2$. Пусть теперь $\Delta : M \to M^2$ — диагональное вложение, заданное равенством $\Delta(x) = (x, x)$ для всех $x \in M$. Тогда $\mathcal{D}N_1 \cup \mathcal{D}N_2 = \Delta^*(\mathcal{D}N_1 \times \mathcal{D}N_2)$ (по определению умножения в когомологиях) $= \Delta^*(\mathcal{D}(N_1 \times N_2)) = \mathcal{D}(N_1 \cap N_2)$ (по определению двойственности Пуанкаре). □