

ЛЕКЦИЯ 1

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ. Сингулярные гомологии и когомологии.

Стандартным симплексом размерности n называется множество $\Delta_n = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_0, \dots, x_n \geq 0, x_0 + \dots + x_n = 1\}$. Сингулярным n -симплексом топологического пространства X называется непрерывное отображение $f : \Delta_n \rightarrow X$. Сингулярной цепью с коэффициентами в кольце K (ассоциативном, коммутативном и с единицей) называется элемент свободного K -модуля $C_n(X, K)$, порожденного всеми сингулярными n -симплексами в X . Сингулярной коцепью называется элемент K -модуля $\text{Hom}(C_n(X, K), K)$. Иными словами, сингулярная цепь это формальная линейная комбинация (с коэффициентами из K) конечного числа сингулярных симплексов, а сингулярная коцепь — функция на сингулярных симплексах со значениями в K .

Гранью симплекса Δ_n называется подмножество $\Delta_{n,i} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid x_i = 0\}$; здесь $0 \leq i \leq n$. Обозначим $u_{i,n-1} : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ аффинное отображение, действующее по формуле $u_{i,n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$; оно является биекцией $\Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_{n,i}$. Определим теперь отображение ∂_n из множества сингулярных n -симплексов в $C_{n-1}(X, K)$ формулой $\partial_n(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ u_{i,n-1}$; продолжим его по “ K -линейности” до гомоморфизма модулей $C_n(X, K) \rightarrow C_{n-1}(X, K)$. Также определим оператор $d_n : C^n(X, K) \rightarrow C^{n+1}(X, K)$ как двойственный к ∂_{n+1} : $d_n(\varphi)(f) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\partial_{n+1}f)$, где $\varphi \in C^n(X, K)$, $f \in C_{n+1}(X, K)$.

Лемма. $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, $d_n \circ d_{n-1} = 0$ для всех n и произвольного топологического пространства X .

Доказательство. Очевидно, эти два равенства эквивалентны; докажем первое. Для произвольного сингулярного симплекса $f : \Delta_{n+1} \rightarrow X$ имеем $\partial_n(\partial_{n+1}(f)) = \partial_n(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f \circ u_{i,n}) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+j} f \circ u_{i,n} \circ u_{j,n-1}$. Как нетрудно проверить, $u_{i,n} \circ u_{j,n-1} = u_{j,n} \circ u_{i-1,n-1}$ при $i > j$ и $u_{i,n} \circ u_{j,n-1} = u_{j+1,n} \circ u_{i,n-1}$ при $i \leq j$. Тем самым члены суммы разбиваются на пары, имеющие противоположный знак, так что вся сумма равна нулю. \square

Тем самым последовательность K -модулей и гомоморфизмов $\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, K) \rightarrow 0$ является цепным комплексом, а последовательность $\dots \xleftarrow{d_n} C^n(X, K) \xleftarrow{d_{n-1}} C^{n-1}(X, K) \xleftarrow{d_{n-2}} \dots \xleftarrow{d_0} C^0(X, K) \leftarrow 0$ — коцепным комплексом свободных K -модулей. K -модуль $H_n(X, K) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ называется сингулярными гомологиями (с коэффициентами в K), а K -модуль $H^n(X, K) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n-1}$ — когомологиями пространства X . Часто обозначают $H_*(X, K) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geq 0} H_n(X, K)$ и $H^*(X, K) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X, K)$.

Пример 1. Пусть $X = \text{pt}$ — пространство, состоящее из одной точки. Тогда $C_n(\text{pt}, K) = K$ для всех n ; дифференциал $\partial_n : K \rightarrow K$ — нулевой при нечетном n и единичный при четном (поскольку количество граней в Δ_n равно $n + 1$ и в определении ∂_n знаки чередуются). Отсюда вытекает, что $H_0(\text{pt}, K) = K$ и $H_n(\text{pt}, K) = 0$ при всех $n > 0$. Нетрудно проверить, что для когомологий результат такой же.

Пример 2. Пусть X — линейно связное топологическое пространство. Для каждого элемента $x = \sum k_i f_i \in C_0(X, K)$ положим $\epsilon(x) = \sum k_i \in K$; тем самым $\epsilon : C_0(X, K) \rightarrow K$ — гомоморфизм модулей. Если $g : \Delta_1 \rightarrow X$ — сингулярный 1-симплекс, то $\partial_1 g = g(a) - g(b)$, где $a = (1, 0)$ и $b = (0, 1)$ — концы отрезка Δ_1 . Отсюда вытекает, что $\epsilon(\partial_1(g)) = 0$, а в силу гомоморфности получаем $\text{Im } \partial_1 \subset \text{Ker } \epsilon$. Обратно, пусть $\epsilon(x) = 0$, где $x = \sum_{i=1}^N k_i f_i$, $f_i : \Delta_0 \rightarrow X$ — сингулярные 0-симплексы, и все $k_i \neq 0$ (иначе нет смысла включать соответствующее слагаемое в сумму). Стандартный симплекс Δ_0 — точка, так что образ f_i — также точка. Поскольку пространство X линейно связно, существуют сингулярные 1-симплексы g_1, \dots, g_{N-1} такие, что $\partial_1(g_i) = f_i - f_{i+1}$. Тогда $x = k_1(f_1 - f_2) + (k_1 + k_2)(f_2 - f_3) + \dots + (k_1 + \dots + k_{N-1})(f_{N-1} - f_N) = \partial_1(k_1 g_1 + (k_1 + k_2)g_2 + \dots)$. Тем самым $\text{Im } \partial_1 = \text{Ker } \epsilon$, откуда $H_0(X, K) = C_0(X, K) / \text{Ker } \epsilon = K$.

Пример 3. Пусть теперь $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ — дизъюнктное объединение топологических пространств. Поскольку стандартный симплекс (любой размерности) связан, образ каждого сингулярного симплекса $f : \Delta_n \rightarrow X$ лежит целиком в одном из X_α . Отсюда вытекает, что $C_n(X, K) = \bigoplus_{\alpha \in A} C_n(X_\alpha, K)$ и $H_n(X, K) = \bigoplus_{\alpha \in A} H_n(X_\alpha, K)$. Аналогично доказывается, что $C^n(X, K) = \prod_{\alpha \in A} C^n(X_\alpha, K)$ и $H^n(X, K) = \prod_{\alpha \in A} H^n(X_\alpha, K)$.

Пусть теперь $F : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Рассмотрим гомоморфизм модулей $F_{\#,n} : C_n(X, K) \rightarrow C_n(Y, K)$, действующий на образующие — сингулярные симплексы — композицией с F : $F_{\#,n}(f) \stackrel{\text{def}}{=} F \circ f$, где $f : \Delta_n \rightarrow X$. Определим также двойственный гомоморфизм $F^{\#,n} : C^n(Y, K) \rightarrow C^n(X, K)$: $F^{\#,n}(\varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(F_{\#,n}(x))$, где $x \in C_n(X, K)$, $\varphi \in C^n(Y, K)$. Непосредственно из определения вытекает, что

отображения $F_{\#,n}$ и $F^{\#,n}$ коммутируют с дифференциалами ∂ и d соответственно: $F_{\#,n-1}\partial_{n,X} = \partial_{n,Y}F_{\#,n}$ и $F^{\#,n+1}d_{n,Y} = d_{n,X}F^{\#,n}$. Тем самым наборы гомоморфизмов $F_{\#,n}$ и $F^{\#,n}$ образуют морфизмы комплексов C и C^* соответственно; обозначим их $F_{\#}$ и $F^{\#}$. Нетрудно проверить, что $(F \circ G)_{\#} = F_{\#} \circ G_{\#}$ и $(F \circ G)^{\#} = G^{\#} \circ F^{\#}$. Тем самым построен ковариантный функтор из категории топологических пространств в категорию цепных комплексов K -модулей и контравариантный функтор из той же категории в категорию коцепных комплексов.

Поскольку $F_{\#}$ и $F^{\#}$ — морфизмы комплексов, естественно определены гомоморфизмы $F_* : H_*(X, K) \rightarrow H_n(Y, K)$ и $F^* : H^*(Y, K) \rightarrow H^*(X, K)$, причем $(F \circ G)_* = F_* \circ G_*$ и $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$. Тем самым построены ковариантный и контравариантный функторы из категории топологических пространств в категорию градуированных K -модулей.

Пример 4. Если $F : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение линейно связных топологических пространств, то $F_* : H_0(X, K) \rightarrow H_0(Y, K)$ — тождественное отображение $K \rightarrow K$. Это вытекает из примера 2: образующей в $H_0(X, K)$ является класс гомологий произвольного сингулярного 0-симплекса $f : \Delta_0 = \text{pt} \rightarrow X$; очевидно, образ сингулярного симплекса при $F_{\#,0}$ — тоже сингулярный симплекс.

Утверждение из гомологической алгебры 1. Пусть $P = \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1,P}} P_n \xrightarrow{\partial_{n,P}} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1,P}} \cdots \xrightarrow{\partial_{1,P}} P_0 \rightarrow 0$ и $Q = \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1,Q}} Q_n \xrightarrow{\partial_{n,Q}} Q_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1,Q}} \cdots \xrightarrow{\partial_{1,Q}} Q_0 \rightarrow 0$ — цепные комплексы K -модулей, а $\mu : P \rightarrow Q$ — морфизм комплексов. Предположим, что существует семейство гомоморфизмов $\psi_n : P_n \rightarrow Q_{n+1}$ таких, что $\mu_n = \partial_{n+1,Q}\psi_n + \psi_{n-1}\partial_{n,P}$ (такое семейство называется цепной гомотопией между μ и нулем). Тогда гомоморфизм $\mu_* : H_*(P) \rightarrow H_*(Q)$ — нулевой.

Доказательство. Пусть $x \in \text{Ker } \partial_{n,P}$. Тогда $\mu_n(x) = \partial_{n+1,Q}\psi_n(x) \in \text{Im } \partial_{n+1,Q}$. \square

Аналогичное утверждение имеет место для коцепных комплексов.

Теорема 1. Пусть $F_t : X \rightarrow Y$ — гомотопия отображений, $0 \leq t \leq 1$. Тогда гомоморфизмы $(F_0)_* : H_*(X, K) \rightarrow H_*(Y, K)$ и $(F_1)_* : H_*(X, K) \rightarrow H_*(Y, K)$ совпадают; то же самое верно для $(F_0)^*$ и $(F_1)^*$.

Доказательство. Ввиду предыдущего утверждения достаточно построить семейство гомоморфизмов $\psi_n : C_n(X, K) \rightarrow C_{n+1}(Y, K)$ таких, что $\partial_{n+1,Y}\psi_n + \psi_{n-1}\partial_{n,X} = (F_0)_n - (F_1)_n$. Гомотопия F_t это непрерывное отображение $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$. Разобьем призму $\Delta_n \times [0, 1] = \{(x_0, \dots, x_n, t) \mid 0 \leq x_0, \dots, x_n, t \leq 1, x_0 + \dots + x_n = 1\}$ на $n+1$ симплексов: $\Delta_n \times [0, 1] = Q_0 \cup \dots \cup Q_n$, где $Q_k \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0, \dots, x_n, t) \in \Delta_n \times [0, 1] \mid x_0 + \dots + x_{k-1} \leq t \leq x_0 + \dots + x_k\}$. Для каждого Q_k зафиксируем его отождествление $v_{n+1,k} : \Delta_{n+1} \rightarrow Q_k$ со стандартным симплексом размерности $n+1$, заданное формулами $v_{n+1,k}(y_0, \dots, y_{n+1}) = (x_0, \dots, x_n, t)$, где $x_i = y_{n+i+1-k}$ при $0 \leq i \leq k-1$, $x_k = y_0 + y_{n+1}$, $x_i = y_{i-k}$ при $k+1 \leq i \leq n$, и $t = y_{n+1-k} + \dots + y_{n+1}$; здесь $k = 0, \dots, n$. Для произвольного сингулярного симплекса $f : \Delta_n \rightarrow X$ положим теперь по определению $\psi_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k F \circ (f \times \text{Id}) \circ v_{n+1,k} \in C_{n+1}(Y, K)$.

Имеем: $\psi_{n-1}(\partial_{n,X}f) + \partial_{n+1,Y}\psi_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+k} F \circ (f \times \text{Id}) \circ (u_{n-1,i} \times \text{Id}) \circ v_{n,k} + \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{l=0}^n (-1)^{j+l} F \circ (f \times \text{Id}) \circ v_{n+1,l} \circ u_{n,j}$. Отображения $(u_{n-1,i} \times \text{Id}) \circ v_{n,k}$ и $v_{n+1,k} \circ u_{n,i+1}$ аффинные и, как нетрудно видеть, переводят вершины симплекса Δ_n в одни и те же точки. Следовательно, эти отображения совпадают. Соответствующие члены входят в сумму с противоположными знаками и, следовательно, сокращаются. Итого остается $\psi_{n-1}(\partial_{n,X}f) + \partial_{n+1,Y}\psi_n(f) = \sum_{l=0}^n (-1)^l (F \circ (f \times \text{Id}) \circ v_{n+1,l} \circ u_{n,0} + (-1)^n F \circ (f \times \text{Id}) \circ v_{n+1,l} \circ u_{n,n+1})$. Аналогично предыдущему рассуждению убеждаемся, что $v_{n+1,l} \circ u_{n,n+1} = (-1)^{n+1} v_{n+1,l+1} \circ u_{n,0}$, откуда вытекает, что в сумме попарно сокращаются все члены, кроме первого и последнего. Это и дает требуемое равенство. \square

Следствие. Соответствия $X \mapsto H_*(X, K)$ и $X \mapsto H^*(X, K)$ являются, соответственно, ковариантным и контравариантным функтором из гомотопической категории в категорию градуированных K -модулей. В частности, гомологии и когомологии гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

Пример 5. Из следствия вытекает, в частности, что если X — стягиваемое пространство, то $H_0(X, K) = K$ и $H_n(X, K) = 0$ при $n > 0$, и аналогично для когомологий. Также вытекает, что если $f : X \rightarrow Y$ — отображение, гомотопное отображению в точку, то $f_* = h_* \circ g_*$, где $g : X \rightarrow \text{pt}$ — отображение в точку, а $h_* : \text{pt} \rightarrow Y$ — отображение точки; отсюда $f_* = \text{id}$ на H_0 и $f_* = 0$ на H_n , $n > 0$; для когомологий аналогично.