ЭКЗАМЕН 24–31 МАЯ 2011 Г.

Пожалуйста, соблюдайте следующие правила оформления работы:

1) *На первой странице работы нужно написать свое имя и фамилию в именительном падеже. Больше ничего на этой странице писать не следует.*
2) *Если в задаче (или пункте) требуется ответ, то записанное решение должно начинаться с формулировки ответа.*

Работы нужно принести в учебную часть до 17.00 31 мая 2011 г.

Задача 1. Непрерывной k-значной функцией $S^1 \to S^1$ называется соответствие, сопоставляющее каждой точке $z \in S^1$ неупорядоченный набор $f(z) = [f_1(z), \dots, f_k(z)]$ из k точек $f_i(z) \in S^1$ (возможно, совпадающих). Набор должен зависеть от точки z непрерывно в очевидном смысле. а) Для всякой ли непрерывной k-значной функции f существует непрерывное отображение $F : S^1 \to (S^1)^k$ такое, что $f(z) = [F_1(z), \dots, F_k(z)]$ для всех $z \in S^1$, где $F(z) \stackrel{\text{def}}{=} (F_1(z), \dots, F_k(z))$? б) Гомотопны ли друг другу непрерывные трехзначные функции $f(z) = \sqrt[3]{z}$ и $g(z) = 1/\sqrt[3]{z}$?

Пояснение. Неупорядоченные наборы $[a, a, b]$ и $[a, b, a]$ — одинаковые. Неупорядоченные наборы $[a, a, b]$ и $[a, b, b]$ — разные.

Задача 2. Функция Морса $f : S^2 \to \mathbb{R}$ инвариантна относительно действия на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ группы движений трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$, переводящих в себя правильный тетраэдр T, вписанный в S^2. Какое наименьшее число критических точек может иметь f?

Задача 3. Гомеоморфен ли конус над $S^2 \times S^2$ гладкому многообразию с краем?

Задача 4. Пусть $K \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3$ — узел “трилистник”, $M \subset \mathbb{R}^3$ — его трубчатая окрестность (гомеоморфная полноторию), ∂M — ее граница (гомеоморфная тору). Существует ли на замыкании множества $S^3 \setminus M$ касательное векторное поле, нигде не обращающееся в нуль и в точках ∂M направленное по нормали к ∂M?

Задача 5. Гомеоморфны ли многообразия $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ и $\mathbb{C}P^2 \# (-\mathbb{C}P^2)$? Здесь $\#$ означает связную сумму, а $-\mathbb{C}P^2$ — многообразие $\mathbb{C}P^2$ с измененной ориентацией.

Пояснение. Связная сумма $A \# B$ двух ориентированных многообразий A и B одинаковой размерности k определяется так: в каждом из многообразий вырезается дырка, затем цилиндр $S^{k-1} \times [0, 1]$ приклеивается своими основаниями к границам дырок, согласно ориентации. Получается ориентированное k-мерное многообразие.

Задача 6. а) Произвольной замкнутой гладкой плоской кривой $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ ($\gamma(0) = \gamma(1)$, $\gamma'(0) = \gamma'(1)$) сопоставим отображение $\Phi_\gamma : S^1 \to S^1$, определенное формулой $\Phi_\gamma(t) = \gamma'(t)/\left|\gamma'(t)\right|$. Докажите, что кривые γ_1 и γ_2 гомотопны друг другу (в классе гладких замкнутых плоских кривых) тогда и только тогда, когда гомотопны друг другу отображения Φ_{γ_1} и Φ_{γ_2} (в классе непрерывных отображений $S^1 \to S^1$). б) Пусть $\gamma_1 \subset S^2$ — маленькая окружность, $\gamma_2 \subset S^2$ — маленькая окружность, пройденная дважды, а $\gamma_0 \subset S^2$ — маленькая “восьмерка”. Какие из кривых $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ гомотопны друг другу в множестве гладких кривых на S^2? в) Сколько компонент линейной связности имеет пространство гладких замкнутых кривых на S^2?