Паззлы Йоккоза.

СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО РЕНОРМАЛИЗУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ — ПАЗЗЛЫ ЙОККОЗА

Часть 1. Свойства бесконечно ренормализуемых отображений

Определение 1.1. Отображение f называется бесконечно ренормализуемым, если множество $\mathcal{R}(f)$ возможных уровней его ренормализации бесконечно.

Рассмотрим отображение из квадратичного семейства $f = f_c\colon z \mapsto z^2 + c$ ($c \in M \cap \mathbb{R}$). Несмотря на то, что множество таких параметров c, что отображение f_c бесконечно ренормализуемо, имеет меру 0 (Любич, 1998), они соответствуют точкам, в которых происходит накопление бифуркаций удвоения периода, и являются крайне важными.

Теорема 1.2. *Пусть f бесконечно ренормализуемо. Тогда:*

(1) *все периодические циклы f отталкивающие;*
(2) *заполненное множество Жюлиа $K(f)$ не имеет внутренних точек;*
(3) *пересечение $\cap_{n\in\mathcal{R}(f)}\mathcal{J}_n$ не содержит периодических точек;*
(4) *поскритическое множество без бесконечности $P(f)\cap\mathbb{C}$ не содержит периодических точек;*
(5) *для всякого уровня ренормализации $n \in \mathcal{R}(f)$ множества $P_n(i)$ и $J_n(j)$ не пересекаются при $i \neq j$.*

Доказательство теоремы опирается на теорему 3.5 предыдущей лекции и две леммы, первую из которых мы докажем сразу, а вторую — позже.

Лемма 1.3. *Пусть f^n ренормализуемо. Тогда всякая притягивающая или нейтральная периодическая точка содержится в $K_n(i)$ ровно для одного i, причем ее период делится на n.*

Доказательство. Пусть x — притягивающая периодическая точка (период точки — p), или нейтральная точка, лежащая в множестве Жюлиа. Тогда x лежит в посткритическом множестве (следствие 2.5 лекции 5). Значит, $x \in K_n(i)$ для некоторого i. Малые заполненные множества Жюлиа могут пересекаться только в отталкивающих периодических точках, поэтому такое i единственно. Отсюда если $f^p(x) = x$, то $f^p(K_n(i)) = K_n(i)$, и n делит p.

Чтобы покрыть оставшийся случай (нейтральная точка, лежащая в множестве Фату), нам придется сослаться на теорему о классификации периодических компонент множества Фату, из которой следует, что x является центром т.н. диска Зигеля (периодическая компонента множества Фату, на которой соответствующая итерация отображения f действует как иррациональное вращение). Рассуждения, аналогичные доказательству следствия 2.5 лекции 5, показывают, что граница диска Зигеля ∂D также лежит в посткритическом множестве. Значит, ∂D пересекается с каким-то малым посткритическим множеством $P_n(i)$ по (открытому в ∂D) множеству. Поскольку f^np действует на ∂D как иррациональное вращение, $\partial D \subset P_n(i)$. Тогда $D \subset K_n(i)$, и i единственно, поскольку внутренности малых заполненных множеств не пересекаются. Поэтому, как и выше, n делит p. □

Лемма 1.4. *Зафиксируем $p \in \mathbb{N}$. Существует лишь конечное число таких уровней ренормализации $n \in \mathcal{R}(f)$, что малое заполненное множество Жюлиа K_n содержит периодическую точку периода p.*

Доказательство теоремы 1.2. Из леммы 1.3 следует, что все циклы периода меньше, чем $n \in \mathcal{R}(f)$, отталкивающие. Тогда, поскольку f бесконечно ренормализуемо, всякая периодическая точка отталкивающая. Более того, поскольку любое открытое подмножество заполненного множества Жюлиа содержит неотталкивающую периодическую точку, $K(f)$ совпадает с $J(f)$, и первые два утверждения доказаны.

Напомним, $\mathcal{J}_n = J_n(1) \cup \dots \cup J_n(n)$. По лемме 1.4, положительная полуорбита всякой периодической точки x отображения f пересекает J_n только для конечного числа уровней ренормализации n. Отсюда следует третье утверждение. Поскольку $P(f)\cap\mathbb{C} \subset \cap_{n\in\mathcal{R}(f)}\mathcal{K}_n = \cap_{n\in\mathcal{R}(f)}\mathcal{J}_n$, мы доказали также и четвертое утверждение.

По теореме 3.5 предыдущей лекции, малые заполненные множества Жюлиа $K_n(i)$ и $K_n(j)$ при $i \neq j$ могут пересекаться только в периодических точках. Значит, $P_n(i) \subset K_n(i)$ и $J_n(j) = K_n(j)$ не пересекаются. $\square$

Согласно теореме, для бесконечно ренормализуемого отображения $K(f) = J(f)$, $K_n(i) = J_n(i)$ и $\mathcal{K}_n = \mathcal{J}_n$. Поэтому в бесконечно ренормализуемом случае мы будем использовать всюду ниже только обозначения с J.

Теорема 1.5. *Пусть f бесконечно ренормализуемо. Тогда для любого $n \in \mathcal{R}(f)$ и для почти любой точки $x \in J(f)$ положительная полуорбита x начиная с некоторого момента принадлежит $\mathcal{J}_n$.*

Доказательство. Множество $\mathcal{J}_n$ инвариантно вперед, поэтому достаточно доказать, что орбита точки x пересечется с ним хотя бы однажды.

Поскольку множество Жюлиа не совпадает со всей сферой (оно не содержит бесконечность), по теореме 3.2 лекции 5 для почти любого $x \in J(f)$ сферическое расстояние между орбитой x и посткритическим множеством $P(f)$ стремится к нулю. Посткритическое множество разбито на циклически чередующиеся множества $P_n(1), \ldots, P_n(n) = P_n$. Тогда для достаточно большого k если некоторая итерация $f^k(x)$ оказалась ближе к P_n, чем к остальному $P(f)$, то таким же свойством обладает и f^{k+n}. Значит, последовательность f^{k+nj} не уходит из U_n под действием итераций отображения f^n, а значит, лежит в $J_n \subset \mathcal{J}_n$. $\square$

Часть 2. Паззлы Йоккоза

Рассмотрим многочлен g степени $d > 1$ со старшим коэффициентом 1 и связным множеством Жюлиа J (и, соответственно, связным заполненным множеством Жюлиа K). Тогда рассмотренное в лекции 7 отображение

$$\phi\colon \mathbb{C} \setminus \bar{\Delta} \to \mathbb{C} \setminus K,$$

нормализованное соотношением $\phi(z)/z \to \lambda > 0$ при $z \to \infty$, сопрягает g с отображением $z \to z^d$ (как это было, например, для f_c, где $c \in M$, при доказательстве теоремы 1.1 лекции 7). Это значит, что $\phi(z^d) = g(\phi(z))$, т.е. для каждого внешнего луча R_t его образ $g(R_t) = R_{dt}$ — также внешний луч. Поэтому периодические лучи очень легко поддаются описанию: если $t = \frac{k}{d^n - 1}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, то точка периодическая с периодом, делящимся на n.

Рассмотрим, например, f_c, $c \in M$. Для этого отображения конец β инвариантного внешнего луча R_0 называется *неподвижной точкой нулевого угла.* Вторую неподвижную точку (отличную от β при $c \neq 1/4$) будем обозначать α. (Соответственно, всюду ниже α и β будут зарезервированными обозначениями точек, зависящих от отображения f_c.) Тогда неподвижная точка x делит множество Жюлиа на части если и только если $x = \alpha \neq \beta$. Это утверждение верно, потому что есть только один неподвижный луч, и потому что выполнена следующая теорема (доказательство которой мы опускаем в связи с недостатком места):

Теорема 2.1 (Douady, Hubbard, Sullivan, Yoccoz)**.** *Каждый периодический внешний луч заканчивается в отталкивающей или параболической периодической точке отображения. Обратно, любая отталкивающая или параболическая периодическая точка достижима, и каждый внешний луч, заканчивающийся в ней, имеет один и тот же период (не обязательно тот же, что и сама точка).*

Из нее легко вывести следующее следствие:

Следствие 2.2. *Любая отталкивающая или параболическая периодическая точка делит множество Жюлиа на конечное число частей.*

Доказательство. Согласно теореме, в эту точку входят лишь лучи той же периодичности. Их конечное число, потому что все они задаются уравнением $t = \frac{k}{d^n - 1}$. Теперь утверждение следует из теоремы 2.7 лекции 7: в точку приходят n лучей тогда и только тогда, когда x разбивает K на n компонент связности. $\square$

Теперь рассмотрим отображение f_c, обе неподвижные точки α, β которого отталкивающие.

Теорема 2.3. *Внешние лучи, заканчивающиеся в α, транзитивно переставляются отображением f. Внешние лучи, заканчивающиеся в $-\alpha$, отделяют β от критической точки отображения f.*

Доказательство. Согласно следствию 3.2, конечное число q внешних лучей заканчивается в неподвижной точке α отображения f. Если луч R_t заканчивается в α, то то же делает и $f(R_t) = R_{2t}$; поскольку f локально инъективно в точке α, неподвижных лучей нет. Мы докажем, что их перестановка транзитивна.

Пусть $P_1, \ldots, P_q$ — компоненты, на которые делят плоскость лучи, и пусть P_q — та компонента, которая содержит α и 0. Прообразы лучей заканчиваются в точках $\pm\alpha$ и делят плоскость на $2q-1$ частей $Q_1, \ldots, Q_{2q-1}$. Поскольку только компонента P_q делится лучами на части, мы можем положить $P_n = Q_n$ при $n < q$, и Q_q положить содержащей критическую точку. Если $i < q$, то $P_i = Q_i$ не содержит критической точки, поэтому f унивалентно отображает P_i на P_j. Поскольку угол каждый раз удваивается, но не может увеличиваться бесконечно, то когда-нибудь P_i отобразится на P_q. Это значит, что они перемещаются транзитивно.

Докажем второе утверждение: $\beta \in P_q$, поскольку она неподвижна, и $\beta \notin Q_q$, потому что $f(Q_q) = P_i$. Тогда лучи, садящиеся в $-\alpha$, отделяют β от критической точки. $\square$

Теперь опишем паззлы Йоккоза, которые мы применим на следующей лекции.
Определения. Предположим, что отображение $f_c(z) = z^2 + c$ обладает следующими свойствами:

(1) множество Жюлиа связно;
(2) обе неподвижные точки α, β отображения f отталкивающие;
(3) орбита критической точки 0 не попадает в точку α.

Рассмотрим внешние лучи, заканчивающиеся в точке α, и пересечем их *эквипотенциалом* — образом окружности $\{\,|z| = 2\,\}$. Разбиение дополнения до множества Жюлиа этими лучами называется составляют *куски паззла глубины* 0. *Паззл глубины* $d+1$ задается прообразами кусков паззла глубины d, причем каждый кусок паззла следующей глубины лежит в каком-то куске паззла предыдущей глубины; таким образом, мы получаем все лучшее и лучшее разбиение. Куски паззла, которые содержат критическую точку, образуют *главное гнездо* паззла Йоккоза.

Часть 3. Доказательство леммы 1.4

Лемма 3.1. *Если $n \in \mathcal{R}(f)$ и $n > 1$, то $\beta \notin K_n$.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда также $\beta \in P_n(1) = f(P_n)$. Тогда K_n не содержит ни α, ни $-\alpha$, поскольку малые заполненные множества Жюлиа могут пересекаться не более чем в одной точке. Тогда K_n не пересекается с лучами, заканчивающимися в $-\alpha$, а тогда они отделяют β и 0 друг от друга, что невозможно в силу связности K_n, в котором обе эти точки лежат. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть $n \in \mathcal{R}(f)$ и $n > 1$ и $\alpha \in K_n$. Обозначим через ρ число компонент $K_n \setminus \{\,\alpha\,\}$. Тогда $n\rho \leqslant q$, где q — число лучей, садящихся в α.*

Идея доказательства. Множество $\mathcal{K}_n$ разделяется на $n\rho$ компонент точкой α, и эти компоненты локально циклически переставляются отображением f. Поэтому начиная с одного луча, мы можем получить как минимум $n\rho$ лучей, и $q \geqslant n\rho$. $\square$

Следствие 3.3. *Пусть $n \in \mathcal{R}(f)$ и $n > q$. Тогда малое заполненное множество Жюлиа K_n не содержит ни одной неподвижной точки f.*

Доказательство леммы 1.4. Докажем, что точка w периода p принадлежит K_n только для конечного набора n. В силу конечности числа неподвижных точек периода p отсюда будет следовать лемма.

Пусть $a \in \mathcal{R}(f)$ и $a > p$, и $w \in K_a$. Тогда $f^p(w) = w \in K_a(p)$. Тогда пересечение K_a и $K_a(p)$ состоит только из w. Тогда w — неподвижная отталкивающая точка f^a. Пусть g — такой квадратичный полином, которому гибридно эквивалентно $f^a \colon U_a \to V_a$. Тогда w соответствует либо точке β, либо точке α этого полинома.

В первом случае $w \notin K_b$ при всех $b > a$. Действительно, по теореме о 3.6 лекции 9, если $c = HOK(a, b)$, то ренормализация $g^{c/a}$ не содержит β по предыдущей лемме, и K_c (а значит, и K_b) не содержит w.

Рассмотрим второй случай. Пусть q — количество лучей, заканчивающихся в точке α для отображения g. Согласно следствию, α не пересекается с заполненными множествами Жюлиа всех ренормализаций g уровня больше q. Поэтому $w \notin K_b$ при $b > qa$. $\square$