

## ЛИСТОК 7

1. Приведите пример функции  $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ , ограниченной по модулю единицей и не продолжающейся непрерывно на  $\overline{\Delta}$ .

2. Пусть  $D_1, D_2$  — ограниченные области с кусочно-гладкими связными границами. Если  $f \in \mathcal{O}(D_1) \cap C(\overline{D}_1)$  взаимно-однозначно отображает  $\partial D_1$  на  $\partial D_2$ , то  $f$  биголоморфно отображает  $D_1$  на  $D_2$ . (Обратный принцип соответствия границ.)

*Указание.* Используйте принцип аргумента.

3. Пусть  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  гомеоморфно отображает вещественную ось на себя с сохранением ориентации. Верно ли, что  $f$  биголоморфно отображает верхнюю полуплоскость на себя?

4. Пусть  $D, D'$  — ограниченные односвязные области с простой границей,  $a, b, c$  — три попарно различные точки на  $\partial D$  и  $a', b', c'$  — три попарно различные точки на  $\partial D'$ .

а) Докажите, что существует биголоморфное отображение  $D$  на  $D'$ , продолжение которого на замыкание  $D$  переводит  $\{a, b, c\}$  в  $\{a', b', c'\}$ .

б) Сколько существует таких отображений?

5. Пусть  $f$  — биголоморфное отображение квадрата  $ABCD$  на единичный круг, продолжение которого на границу переводит вершины  $A, B, C$  в точки  $-1, -i, 1$  соответственно. Куда перейдет вершина  $D$ ?

6. Пусть  $\Pi_1, \Pi_2$  — два прямоугольника в  $\mathbb{C}$ . Докажите, что всякое биголоморфное отображение  $\Pi_1$  на  $\Pi_2$ , продолжение которого на границу переводит вершины в вершины, является аффинным.

7. Биголоморфно отобразите область  $D = \mathbb{C} \setminus K$ , где

$$K = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \cup (-i\infty, -i] \cup [i, +i\infty),$$

на верхнюю полуплоскость.