Комплексные многообразия,

лекция 15: оператор Дирака

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

4 апреля 2011

Алгебры Клиффорда (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V, g – векторное пространство над $k := \mathbb{C}, \mathbb{R}$ с билинейной, симметричной 2-формой, а $\mathcal{C}\ell(V,g)$ – алгебра с единицей, полученная как фактор **тензорной алгебры** $T^{\otimes}V := k \oplus V \oplus V \otimes V \oplus ... \oplus T^{\otimes i}V$ по идеалу, порожденному $xy + yx = g(x,y)$, где $x, y \in V$. Алгебра $\mathcal{C}\ell(V,g)$ называется **алгеброй Клиффорда**.

ПРИМЕР: Если $g = 0$, $\mathcal{C}\ell(V,g)$ есть алгебра Грассманна.

УТВЕРЖДЕНИЕ: $\dim \mathcal{C}\ell(V,g) = 2^{\dim V}$.

ТЕОРЕМА: (периодичность Ботта над $\mathbb{C}$)

$$\mathcal{C}\ell(V,g) \cong \operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C})$$

для $V = \mathbb{C}^{2n}$ и

$$\mathcal{C}\ell(V,g) \cong \operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C}) \oplus \operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C})$$

для $V = \mathbb{C}^{2n+1}$ (g невырожденная). ■

Спинорная группа (четномерные пространства) – повторение

ТЕОРЕМА: **Группа автоморфизмов алгебры** $\operatorname{Mat}(V)$ **изоморфна** $PGL(V)$ (фактора группы $GL(V)$ по центру).

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $V = \mathbb{C}^{2n}$, - векторное пространство над $\mathbb{C}$ с невырожденным скалярным произведением. Группа Ли $SO(V)$ действует на $\mathcal{C}\ell(V)$ автоморфизмами, что задает гомоморфизм

$$SO(V) \hookrightarrow \operatorname{Aut}(\operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C})) = PGL(2^n, \mathbb{C})$$

в силу теоремы, доказанной выше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (Эли Картан, 1913) **Спинорное представление** алгебры Ли $\mathfrak{so}(V)$ есть ее представление в $\mathbb{C}^{2^n}$, заданное изоморфизмом $\mathfrak{pgl}(2^n) = \mathfrak{sl}(2^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Спинорная группа** $\operatorname{Spin}(2n)$ есть накрытие $SO(2n)$, полученное интегрированием спинорного представления.

Спинорная группа (нечетномерные пространства) – повторение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для нечетномерного $V = \mathbb{C}^{2n+1}$, **$+$-спинорное представление $\mathfrak{so}(V)$** есть действие $\mathfrak{so}(V)$ в $\mathbb{C}^{2^n}$, полученное из изоморфизма $\mathcal{C}\ell^+(V) = \operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C})$ и $\operatorname{Aut}(\operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C})) = PGL(2^n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{pgl}(2^n) = \mathfrak{sl}(2^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **$-$-спинорное представление $\mathfrak{so}(V)$** определяется аналогично.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Эти представления **переводятся одно в другое сопряжением с любым элементом $O(V)\backslash SO(V)$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Спинорная группа** $\operatorname{Spin}(2n+1)$ есть накрытие группы $SO(2n+1)$, полученное интегрированием $+$- или $-$-спинорного представления.

Спиноры над $V = W \oplus W^*$ (повторение)

ПРИМЕР: Пусть $V = W \oplus W^*$, с естественной метрикой. Тогда $\mathcal{C}\!\ell(W) = \Lambda^* W$, $\mathcal{C}\!\ell(W^*) = \Lambda^* W^*$ и имеет место разложение $\mathcal{C}\!\ell(W) = \Lambda^* W \otimes \Lambda^* W^* = \Lambda^* V$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим действие $\Lambda^* W$ на $\Lambda^* W$ внешними умножениями, $x, y \longrightarrow x \wedge y$, и $\Lambda^* W^*$ на $\Lambda^* W$ подстановкой, $x, \xi \longrightarrow x \lrcorner \xi$. **Это задает на $\Lambda^* W$ структуру $\mathcal{C}\!\ell(V)$-модуля.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно проверить на образующих: $\omega \wedge x \wedge y = -\omega \wedge y \wedge x$, $(\omega \lrcorner \xi) \lrcorner \zeta = -(\omega \lrcorner \zeta) \lrcorner \xi$, и

$$(\omega \wedge x) \lrcorner \xi + (\omega \lrcorner \xi) \wedge x = \omega \langle x, \xi \rangle.$$

■

СЛЕДСТВИЕ: **$\Lambda^* W$ канонически отождествляется со спинорным представлением** $\operatorname{Spin}(W \oplus W^*)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Лагранжево подпространство** в векторном пространстве со скалярным произведением g есть подпространство половинной размерности, на которое g ограничивается тривиально. Разложение $V = W_1 \oplus W_2$ в прямую сумму лагранжевых подпространств называется **лагранжевым разложением**.

Spin^c-структуры и Spin-структуры (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – четномерное риманово многообразие, $\mathcal{C}\!\ell(TM)$ – соответствующее расслоение клиффордовых алгебр, а $\mathcal{C}\!\ell_{\mathbb{C}}(TM)$ – его комплексификация. **Spin^c-структура** на M есть расслоение $\mathcal{C}\!\ell_{\mathbb{C}}(TM)$-модулей **($\mathbb{C}$-спиноров)**, которые изоморфны, как $\mathcal{C}\!\ell_{\mathbb{C}}(TM)$-модули, спинорному представлению.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Spin^c-структура определена канонически с точностью до подкрутки на линейное расслоение.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – почти комплексное эрмитово многообразие. Тогда $\Lambda^{1,0}(M) \oplus \Lambda^{0,1}(M)$ – лагранжево разложение $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Это задает структуру $\mathcal{C}\!\ell_{\mathbb{C}}(TM)$-модуля на $\Lambda^*(\Lambda^{1,0}(M)) = \Lambda^{*,0}(M)$.

СЛЕДСТВИЕ: **На почти комплексном эрмитовом многообразии задана стандартная Spin^c-структура.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Spin-структура** на многообразии есть Spin^c-структура такая, что ее детерминантное расслоение $\det E$ тривиально. В этом случае E называется **расслоением спиноров**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть – почти комплексное эрмитово многообразие, его каноническое расслоение, а $L = K^{-1/2}$ линейное расслоение, такое, что $K \cong L^{-1}$. **Тогда на задана Spin-структура $E \cong \Lambda^{*,0}(M) \otimes L$.**

Главные G-расслоения (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Главное G-расслоение** есть гладкое расслоение $X \longrightarrow M$ со свободным действием группы Ли G, транзитивным на слоях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Расслоенное произведение** пространств M_1, M_2 с действием G есть фактор $M_1 \times_G M_2 := (M_1 \times M_2)/G$ по диагональному действию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть P есть G-расслоение, а V – представление G. **Ассоциированное векторное расслоение** есть $P \times_G V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $G_1 \longrightarrow G$ – гомоморфизм групп. **Редукция** G-расслоения P к G_1 есть главное G_1-расслоение P_1 такое, что $P_1 \times_{G_1} G = P$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **G-структура на гладком многообразии M** есть редукция главного $GL(n)$-расслоения реперов на M к G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Структурной группой риманова многообразия** называется главное $O(n)$-расслоение, связанное с римановой структурой.

Главные расслоения и Spin-структуры (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Спин-структура** на римановом многообразии есть редукция структурного расслоения к $\mathrm{Spin}(n) \longrightarrow O(n)$. Многообразие с выделенной спин-структурой называется **спин-многообразием**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из длинной точной последовательности

$$0 \longrightarrow H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(M, \mathrm{Spin}(n)) \longrightarrow H^1(M, SO(n)) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

ясно, что препятствие к существованию спин-структуры лежит в группе $H^2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (оно называется **вторым классом Штифеля-Уитни**). Также, **множество спин-структур на спин-многообразии параметризуется $H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Расслоение спиноров** на спин-многообразии есть ассоциированное векторное расслоение, связанное со спинорным представлением $\mathrm{Spin}(n)$.

Связность на G-расслоениях (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность ∇ на главном G-расслоении P есть G-инвариантное расщепление касательного TP в прямую сумму $TP = T_\nabla P \oplus T_{\mathrm{vert}} P$, где $T_{\mathrm{vert}} P$ – касательные вектора к слоям $P \longrightarrow M$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Связности на главном G-расслоении P **взаимно однозначно соответствуют G-инвариантным связностям на ассоциированном векторном расслоении**, для любого точного представления G.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M – риманово многообразие с ортогональной связностью. **Тогда на расслоении спиноров задана каноническая связность,** которая называется **спинорной связностью**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Соответствующая G-структура получается из стандартной $SO(n)$-структуры накрытием, значит, **связностей у них столько же.** ■

Кручение (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ∇ – связность на $\Lambda^1 M$,

$$\Lambda^1 \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

Кручение ∇ задается формулой $T_\nabla := \mathrm{Alt} \circ \nabla - d$, где

$$\mathrm{Alt}: \ \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$$

– внешнее умножение. Кручение есть отображение $T_\nabla: \ \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **кручение это тензор** (то есть C^∞-линейное отображение).

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что оператор $\Lambda^2 TM \longrightarrow TM$, заданный как

$$\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y]$$

– **тоже тензор, причем задает отображение, двойственное к T_∇.**

Связность Леви-Чивита (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть B – расслоение с метрикой. **Докажите, что на B всегда существует ортогональная связность.**

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите единственность.

Оператор Дирака на многообразиях Калаби-Яу

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово многообразие с заданной на нем спин-структурой, а $\nabla: S \longrightarrow S \otimes \Lambda^1 M$ – связность Леви-Чивита на спинорах. Отождествив $\Lambda^1 M$ и TM, можно считать, что $\nabla: S \longrightarrow S \otimes TM$. Рассмотрим оператор **спинорного умножения** $S \otimes TM \xrightarrow{\sigma} S$. **Оператор Дирака** D есть композиция $\nabla: S \longrightarrow S \otimes TM$ и σ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гармонический спинор** есть спинор ψ такой, что $D(\psi) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **На многообразии Калаби-Яу, спиноры отождествляются с $\Lambda^{*,0}(M)$,** а клиффордово умножение действует так:

$$\Lambda^{p,0}(M) \otimes \Lambda^{1,0} M \xrightarrow{\sigma} \Lambda^{p+1,0}(M)$$

есть внешнее умножение, а

$$\Lambda^{p,0}(M) \otimes \Lambda^{0,1} M \xrightarrow{\sigma} \Lambda^{p-1,0}(M)$$

делает из $\eta \otimes x$ подстановку $\eta \lrcorner x^\sharp$, где $x^\sharp \in T^{1,0}M$ есть векторное поле, двойственное x.

СЛЕДСТВИЕ: На многообразии Калаби-Яу, **оператор Дирака действует как $\partial \oplus \partial^*: \Lambda^{*,0}(M) \longrightarrow \Lambda^{*,0}(M)$.**

СЛЕДСТВИЕ: **На многообразии Калаби-Яу, гармонические спиноры есть гармоническе $(p,0)$-формы.**

Пространство алгебраических тензоров кривизны

УТВЕРЖДЕНИЕ: Имеет место разложение $V\otimes V\otimes V\otimes V$ как представления $GL(V)$: $V\otimes V\otimes V\otimes V = \Lambda^4 V\oplus \operatorname{Sym}^4 V\oplus V_{3,1}\oplus V_{2,1,1}\oplus V_{2,2}$, где $V_{3,1} = \ker \operatorname{Sym}_{34}\Big|_{\Lambda^3 V\otimes V}$, $V_{2,1,1} = \ker \operatorname{Alt}_{34}\Big|_{\operatorname{Sym}^3 V\otimes V}$, а $V_{2,2}$ **– пространство тензоров, которые антисимметричны по перестановкам 1 и 2, а также 3 и 4 множителя, симметризованные по одновременным перестановкам 1 и 4, а также 2 и 3.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $V_{2,2}$ **есть ядро умножения** $V_{2,2} = \ker\left(\operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 V)\longrightarrow \Lambda^4 V\right)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство $V_{2,2}\subset V\otimes V\otimes V\otimes V$ называется **пространством алгебраических тензоров кривизны**.

ТЕОРЕМА: Рассмотрим тензор кривизны связности Леви-Чивита, $R^l_{ijk}\in \Lambda^2 M\otimes \mathfrak{so}(TM)$. Отождествляя $\mathfrak{so}(TM)$ и $\Lambda^2(TM)$, получим тензор кривизны $R_{ijkl}\in\Lambda^2 M\otimes\Lambda^2 M$. **Тогда $R_{ijkl}\in V_{2,2}$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. следующий слайд.

СЛЕДСТВИЕ: Кривизна связности Леви-Чивита симметрична: $R_{ijkl}\in \operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 TM)$.

Симметрии тензора кривизны

УТВЕРЖДЕНИЕ: (алгебраическое тождество Бьянки) Пусть $\Theta_\nabla \in \Lambda^2 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$ – кривизна связности Леви-Чивита. **Тогда**

$$\operatorname{Cycl}_{1,2,3}(\Theta_\nabla) := \Theta_\nabla(X,Y,Z,\cdot) + \Theta_\nabla(Y,Z,X,\cdot) + \Theta_\nabla(Z,X,Y,\cdot) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем X, Y, Z, которые коммутируют. Тогда $\nabla_X Y = \nabla_Y X$, etc., потому что ∇ без кручения. Значит,

$$\operatorname{Cycl}_{1,2,3}(\Theta_\nabla(X,Y,Z))$$
$$= (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_X\nabla_Z Y) + (\nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Y\nabla_X Y) + (\nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_Z\nabla_Y X). = 0$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ: Тождество открыл Риччи через несколько лет после того, как Бьянки доказал "дифференциальное тождество Бьянки"

СЛЕДСТВИЕ: Тензор римановой кривизны лежит в $V_{2,2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Проекция ядра $\operatorname{Cycl}_{1,2,3}\big|_{\Lambda^2 M\otimes\Lambda^2 M}$ на все остальные компоненты $V\otimes V\otimes V\otimes V$ зануляется. ■

Гауссова кривизна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V - векторное пространство с невырожденным скалярным произведением g. **След** $\operatorname{Tr}_{12}: V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n-2}$ определяется как отображение, двойственное к умножению $A \longrightarrow g \otimes A$. $\operatorname{Tr}_{ij}: V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n-2}$ определяется как отображение, действующее по i-му и j-му сомножителю как Tr_{12} на первом и втором:

$$\operatorname{Tr}_{ij}(a_{123\ldots n}) = \sum_{i,j} g^{ij} a_{123\ldots n}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гауссова** (она же **скалярная**) кривизна риманова многообразия есть $\operatorname{Tr}_{13}\operatorname{Tr}_{24}(\Theta_\nabla)$, где $\Theta_\nabla \in \operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 TM)$ – тензор римановой кривизны.

Клиффордово умножение на $\mathrm{Sym}^2(\Lambda^2 V)$

ЛЕММА 2 Пусть $R \in \mathrm{Sym}^2(\Lambda^2 V)$, где V – пространство со скалярным умножением g. Обозначим клиффордово умножение за $\tau: V^{\otimes^4} \longrightarrow \mathcal{C}\ell(V)$. **Тогда**

$$\tau(R) = \mathrm{Tr}_{13}\,\mathrm{Tr}_{24}\,R + \tau(\mathrm{Alt}(R)),$$

где $\mathrm{Alt}: \mathrm{Sym}^2(\Lambda^2 V) \longrightarrow \Lambda^4 V$ **– внешнее умножение.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $x, y, z, t \in V$, а $R(x,y,z,t) := (xy - yx)(zt - tz) + (zt - tz)(xy - yx)$ соответствующий элемент $\mathrm{Sym}^2(\Lambda^2 V)$. Тогда

1. Если x, y, z, t попарно ортогональны, то $\tau(R(x,y,z,t)) = \tau(\mathrm{Alt}(R))$, потому что x, y, z, t антикоммутируют в алгебре Клиффорда.

2. Если x, y, z попарно ортогональны, а $y = t$, то $xy - yx$ антикоммутирует с $zt - tz$, значит, $\tau(R(x,y,z,t)) = 0$.

3. Если x, y ортогональны, а $y = t$ и $x = z$, то

$$\tau(R(x,y,z,t)) = \tau((xy - yx))^2 = g(x,x)g(y,y).$$

■

Оператор Дирака и грубый лапласиан

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $D: S \longrightarrow S$ – оператор Дирака, а $x_i \in TM$ – ортонормированный репер. Тогда $D(s) = \sum_i \sigma(x_i, \nabla_{x_i}(s))$, где $\sigma: TM \otimes S \longrightarrow S$ есть клиффордово умножение.

СЛЕДСТВИЕ: Обозначим за $\Theta \in \Lambda^2 M \otimes \operatorname{End}(S)$ кривизну S. Тогда

$$D^2(s) = \sum_{i,j} \sigma(x_i x_j, \nabla_{x_i} \nabla_{x_j} s) = \sum_{i,j} \sigma(x_i x_j, \Theta_{x_i, x_j} s) + \sum_{i,j} \sigma(x_i x_j + x_j x_i, \nabla_{x_i} \nabla_{x_j} s)$$

Поскольку $\sigma(x_i x_j + x_j x_i, v) = g(x_i, x_j) v$, получаем

$$D^2(s) = \sigma(\Theta, s) + \sum_i \nabla_{x_i} \nabla_{x_i} s.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Грубый лапласиан** на расслоении B со связностью над римановым многообразием определяется как $Ð(s) := \operatorname{Tr}_{12}(\nabla^2 s)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Предыдущее следствие переписывается как

$$D^2(s) = \sigma(\Theta, s) + Ð(s).$$

Формула Вайценбека

ТЕОРЕМА: (формула Вайценбека, формула Лихнеровича)
Пусть M – риманово многообразие со спин-структурой, $Đ : S \longrightarrow S$ – грубый лапласиан, Sc – оператор умножения на скалярную кривизну, а а $D : S \longrightarrow S$ – оператор Дирака. **Тогда $D^2 = Đ + \mathsf{Sc}$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $D^2(s) = \sigma(\Theta, s) + Đ(s)$, а $\sigma(\Theta, s) = \mathsf{Sc}(s)$ в силу Леммы 2. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: $g(Đ(s), s) = \mathrm{Tr}_{12}(\nabla^2(s), s) = g(\nabla(s), \nabla(s))$. Поэтому $\int g(Đ(s), s) = \int_M g(\nabla(s), \nabla(s))$. Значит, **на компактном многообразии, если $Đ(s) = 0$, то $\nabla(s) = 0$.**

ТЕОРЕМА: (теорема Бохнера о занулении)
Пусть M – компактное риманово многообразие с неотрицательной скалярной кривизной Sc. **Тогда $\nabla(s) = 0$ для любого гармонического спинора. Если к тому же $\mathsf{Sc} > 0$ в какой-то точке, то $s = 0$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу формулы Вайценбека,

$$0 = g(D^2(s), s) = g(Đ(s), s) + \int_M \mathsf{Sc} \cdot g(s, s) = \int_M g(\nabla(s), \nabla(s)) + \int_M \mathsf{Sc} \cdot g(s, s).$$

Значит, $\nabla(s) = 0$. Если в окрестности $m \in M$, $\mathsf{Sc} > 0$, то в этой окрестности $s = 0$, и **в силу $\nabla(s) = 0$, $s = 0$ на всем M.** ■.