Комплексные многообразия 16: многообразия Калаби-Яу

Задача 16.1. Пусть M – $2n+1$-мерное кэлерово многообразие с группой локальных голономий $SU(2n+1)$. Докажите, что каноническое расслоение $K(M)$ тривиально.

Задача 16.2. Пусть M – $2n$-мерное кэлерово многообразие с группой локальных голономий $SU(2n)$. Докажите, что либо $K(M)$ тривиально, либо $\pi_1(M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Указание. Используйте конечность $\pi_1(M)$ для многообразий Калаби-Яу, разложение Богомолова которых не содержит комплексных торов.

Задача 16.3. Пусть Ω – ненулевая (3,0)-форма на трехмерном комплексном пространстве V, а $\Re\Omega$ – ее вещественная часть. Докажите, что стабилизатор $Re\Omega$ в $GL(6,\mathbb{R})$ изоморфен $GL(3,\mathbb{C})$.

Задача 16.4. Докажите, что комплексная структура на трехмерном многообразии Калаби-Яу однозначно задается формой $Re\Omega$, где Ω – форма голоморфного объема.

Задача 16.5. Пусть M – гладкое шестимерное многообразие, а ρ – замкнутая вещественная 3-форма, такая, что $St_{GL(6)}(\rho\big|_m) \cong GL(3,\mathbb{C})$ в каждой точке $m \in M$. Всегда ли ρ получается как вещественная часть голоморфной формы объема на многообразии Калаби-Яу?

Задача 16.6. Пусть g – кэлерова метрика с нулевой скалярной кривизной на компактном многообразии с тривиальным каноническим расслоением. Докажите, что g риччи-плоская.

Задача 16.7. Приведите пример компактного кэлерова многообразия с нулевой скалярной кривизной и нетрициальной кривизной Риччи.

Задача 16.8. Пусть T – двумерный комплексный компактный тор, $\mathsf{Sym}^2 T$ – симметрический квадрат T, а $T^{[2n]}$ – раздутие диагонали в $\mathsf{Sym}^2 T$. Докажите, что $T^{[2n]}$ гладко и голоморфно симплектично.

Задача 16.9. Рассмотрим естественное действие T на $T^{[2n]}$, и пусть M есть фактор $T^{[2n]}$ по T. Докажите, что M – гладкое 2-мерное многообразие Калаби-Яу.

Замечание. Оно называется **куммеровой поверхностью K3**.