

Задачи к экзамену по курсу “Дифференциальная геометрия и потоки Риччи”, весна 2010.

Для сдачи экзамена с оценкой $5 - k$ достаточно решить $9 - 2k$ задач из списка.

Задача 1.1. Киллингово векторное поле X на римановом многообразии (M, g) это векторное поле, удовлетворяющее $\text{Lie}_X g = 0$. Докажите, что X киллингово тогда и только тогда, когда $g(\nabla_Y X, Z) = -g(\nabla_Z X, Y)$ для любых векторных полей Y и Z .

Задача 1.2. Постройте на (S^3, g) (с обычной метрикой) ортогональную связность ∇ , кручение которой удовлетворяет $g(T_\nabla(X, Y), Z) = \text{Vol}_g$. Докажите, что она единственна. Найдите кривизну.

Задача 1.3. Произведение Кулкарни-Номидзу симметрических 2-форм h и k записывается формулой

$$(h \diamond k)(x, y, z, t) = h(x, z)k(y, t) + h(y, t)k(x, z) - h(x, t)k(y, z) - h(y, z)k(x, t).$$

Докажите, что $h \diamond k$ лежит в пространстве алгебраических тензоров кривизны. Докажите, что такие тензоры порождают пространство алгебраических тензоров кривизны.

Задача 1.4. Пусть g есть метрический тензор. Докажите, что $h \mapsto h \diamond g$ инъективно на $\text{Sym}^2 T^*M$, и сопряженное с этим отображение есть естественная проекция алгебраических тензоров кривизны на кривизну Риччи.

Задача 1.5. Докажите, что тензор кривизны n -мерной сферы со стандартной метрикой g равен $cg \diamond g$, $c \in \mathbb{R}$.

Задача 1.6. Пусть $\phi : M \rightarrow N$ – гомеоморфизм связных римановых многообразий, который является изометрией в хотя бы одной точке, и сохраняет тензор кривизны. Докажите, что это изометрия.

Задача 1.7. Пусть M – полное, односвязное риманово многообразие, причем в разложении Риччи тензора кривизны M встречается только скалярная кривизна. Докажите, что M изометрично сфере, гиперболическому пространству либо \mathbb{R}^n .

Задача 1.8. Пусть $G = SU(3)$ с метрикой g , которая инвариантна относительно правого и левого действия $SU(3)$ на себе. Докажите, что g определено однозначно с точностью до постоянного множителя. Рассмотрим подмножество $T^2 \subset G$, состоящее из диагональных матриц. Докажите, что это плоский тор, который лежит в G как вполне геодезическое подмногообразие.

Задача 1.9. Пусть M – риманово многообразие, $\dim M \geq 4$. Докажите, что M **конформно плоско**, то есть у каждой точки M есть окрестность, в которой метрика делается плоской после умножения на положительную функцию, тогда и только тогда, когда кривизна Вейля W равна нулю (то есть когда зануляются все компоненты кривизны, кроме скалярной и кривизны Риччи).

Задача 1.10. Пусть (M, g) – риманово многообразие, ∇_{LC} – связность Леви-Чивита, а ∇ – ортогональная связность на TM . Рассмотрим форму $T_1 \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M$, где $T_1(X, Y, Z) = g(T_\nabla(X, Y), Z)$, а $T_\nabla \in \Lambda^2 M \otimes TM$ есть тензор кручения ∇ . Предположим, что T_1 антисимметрично. Докажите, что $\text{Ric}(\nabla) = \text{Ric}(\nabla_{LC})$.

Определение 1.1. 2-форма на векторном пространстве V называется **невыврожденной**, если она симплектична. Для $i > 2$, i -форма ρ называется **невыврожденной**, если для каждого нигде не зануляющегося векторного поля X , контракция ρ с X невырождена на ортогональном дополнении к X .

Задача 1.11. Найдите все i, n , для которых на n -мерном пространстве есть невырожденные i -формы.

Задача 1.12. Пусть ρ – невырожденная в каждой точке i -форма на римановом многообразии M , ∇ – связность Леви-Чивита, а $\nabla(\rho) = 0$. Пусть $2 < i < \dim M$. Докажите, что M Риччи-плоско.

Задача 1.13. Пусть M – риманово многообразие, а объем шара радиуса r в M такой же, как в \mathbb{R}^n , для всех $r \in [0, \varepsilon[$. Докажите, что M риччи-плоско.

Задача 1.14. Приведите пример последовательности полных двумерных многообразий, которая не имеет подпоследовательности, сходящейся по Громову-Хаусдорфу.

Задача 1.15. Пусть B – замкнутый трехмерный шар со стандартной метрикой. Найдите для каждого ε метрическое пространство B_ε , гомеоморфное B и удовлетворяющее $d_{GH}(B, B_\varepsilon) < \varepsilon$, таким образом, что B_ε лежит в ε -окрестности своей границы.

Задача 1.16. Постройте последовательность метрик на трехмерной сфере, такую, что ее предел по Громову-Хаусдорфу – трехмерный шар.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

Задача 1.17. Пусть B – векторное расслоение со связностью ∇ , $d^\nabla : B \otimes \Lambda^i M \rightarrow B \otimes \Lambda^{i+1} M$ ее продолжение, полученное по правилу Лейбница, а $R \in \Lambda^2 M \otimes \text{End} B$ кривизна. Докажите **дифференциальное тождество Бьянки**, $d^\nabla R = 0$. Выведите из него, что на любом римановом многообразии имеет место равенство $ds = -2\delta \text{Ric}$, где s есть скалярная кривизна, а $\delta : \text{Sym}^2 T^* M \rightarrow T^* M$ композиция $\nabla : \text{Sym}^2 T^* M \rightarrow \text{Sym}^2 T^* M \otimes \Lambda^1 M$ и спаривания $\text{Sym}^2 T^* M \otimes \Lambda^1 M \rightarrow T^* M$.

Задача 1.18. Пусть (M, g) – n -многообразие, удовлетворяющее $\text{Ric} = \lambda g$, где $\lambda \in C^\infty M$, а $n > 2$. Докажите, что λ постоянна.

Задача 1.19. Рассмотрим функционал $S(g) = \int s \text{Vol}_g$, сопоставляющий метрике интеграл от ее скалярной кривизны. Докажите, что $dS(h) = \int_M \langle \frac{s}{2} g - \text{Ric}, h \rangle \text{Vol}_g$.

Задача 1.20. Рассмотрим пространство \mathcal{M}_1 метрик g на компактном многообразии M , таких, что $\int_M \text{Vol}_g = 1$. Докажите, что критические точки S на \mathcal{M}_1 – это в точности эйнштейновы метрики.¹

¹ Метрика называется **эйнштейновой**, если удовлетворяет $\text{Ric}_g = \lambda g$.