Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Анализ 7: Дифференциальные операторы

7.1. Дифференциальные операторы на кольце

Определение 7.1. **Коммутатор** векторных операторов A, B (обозначается $[A, B]$) это $AB - BA$.

Задача 7.1. Докажите, что коммутатор двух дифференцирований – дифференцирование.

Задача 7.2. Докажите, что коммутатор удовлетворяет тождеству Якоби

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]].$$

Определение 7.2. Пусть R - кольцо над полем k. **Дифференциальный оператор порядка** 0 — это отображение $R \xrightarrow{v} R$, которое R-линейно, то есть переводит $r \in R$ в $v(1)r$. Множество таких операторов обозначается $\operatorname{Diff}^0(R)$. Дифференциальный оператор порядка $i > 0$ определяется индуктивно, в терминах дифференциальных операторов порядка $i - 1$. А именно, считается, что k-линейное отображение $a: \ R \longrightarrow R$ лежит в $\operatorname{Diff}^i(R)$, если для любого $v \in \operatorname{Diff}^0(R)$, коммутатор $[a, v]$ лежит в $\operatorname{Diff}^{i-1}(R)$. Мы имеем цепочку вложений

$$\operatorname{Diff}^0(R) \subset \operatorname{Diff}^1(R) \subset \operatorname{Diff}^2(R) \subset ...$$

Объединение всех $\operatorname{Diff}^i(R)$ называется **множеством дифференциальных операторов**. Как мы увидим немного погодя, $\operatorname{Diff}^*(R)$ образует алгебру (некоммутативное, ассоциативное кольцо с единицей). Дифференциальные операторы на кольце $C^\infty M$ называются **дифференциальными операторами на** M, и обозначаются $\operatorname{Diff}^*(M)$.

Задача 7.3. Докажите, что $\operatorname{Diff}^0(R)$ естественно изоморфно R.

Задача 7.4. Докажите, что дифференцирование – это дифференциальный оператор первого порядка.

Задача 7.5. Пусть $D \in \operatorname{Diff}^1(R)$ – дифференциальный оператор первого порядка, а $D'(a) = D(a) - D(1)a$. Докажите, что это дифференцирование.

Задача 7.6 (!). Пусть $D^i \in \operatorname{Diff}^i(R)$, $D^j \in \operatorname{Diff}^j(R)$ - дифференциальные операторы. Докажите, что их композиция $D^i D^j$ лежит в $\operatorname{Diff}^{i+j}(R)$.

Указание. Воспользуйтесь индукцией и тождеством

$$[v, D^i D^j] = [v, D^i] D^j + D^i [v, D^j]$$

Замечание. Таким образом, дифференциальные операторы образуют **алгебру дифференциальных операторов**.

Задача 7.7. Рассмотрим кольцо $\mathbb{C}[t]/(t^2 = 0)$ (полиномов с соотношением $t^2 = 0$). Найдите его алгебру дифференциальных операторов.

Задача 7.8 (*). Пусть k – поле характеристики 0, K – его конечное расширение. Найдите $\operatorname{Diff}^*_k(K)$.

Задача 7.9 (*). Рассмотрим кольцо, конечномерное над полем $k = \mathbb{C}$. Найдите размерность его алгебры дифференциальных операторов.

Задача 7.10 (!). Пусть $I \subset R$ - идеал, а $D \in \operatorname{Diff}^k(R)$ - дифференциальный оператор порядка k. Докажите, что $D(I^{k+1}) \subset I$.

Указание. Докажите, что $D(a_1a_2...a_k) = D'(a_2a_3...a_k) + a_1D(a_2a_3...a_k)$, где $D' \in \operatorname{Diff}^{k-1}(R)$. Воспользуйтесь индукцией.

Задача 7.11 (!). Пусть $D^i \in \operatorname{Diff}^i(R)$, $D^j \in \operatorname{Diff}^j(R)$ - дифференциальные операторы. Докажите, что их коммутатор $[D^i, D^j]$ лежит в $\operatorname{Diff}^{i+j-1}(R)$.

Указание. Воспользуйтесь индукцией и тождеством Якоби:

$$[v, [D^iD^j]] = [[v, D^i], D^j] + [D^i, [v, D^j]].$$

7.2. Кольцо дифференциальных операторов на алгебре полиномов

В этом разделе, $R = \mathbb{R}[t_1, ..., t_n]$ это кольцо многочленов над полем $\mathbb{R}$ характеристики 0.

Задача 7.12. Пусть D – дифференциальный оператор порядка k на R, который зануляется на всех полиномах степени $\leqslant k$. Докажите, что $D = 0$.

Указание. Примените формулу $D(a_1a_2...a_k) = D'(a_2a_3...a_k) + a_1D(a_2a_3...a_k)$, где $D' \in \operatorname{Diff}^{k-1}(R)$. Воспользуйтесь индукцией.

Задача 7.13. Рассмотрим дифференциальный оператор $D = f\frac{d}{dt_{i_1}}\frac{d}{dt_{i_2}}\frac{d}{dt_{i_3}}...\frac{d}{dt_{i_k}}$. Докажите, что он равен 0 на всех мономах степени $< k$ и cf на $\prod_{j=1}^k t_{i_j}$, где $c = m_1!m_2!m_3!...,m_n!$, а m_i – кратность, с которой $\frac{d}{dt_i}$ входит в моном D.

Задача 7.14 (!). Пусть $P_k \subset R$ – векторное пространство, порожденное мономами степени $\leqslant k$, а $\Psi : P_k \longrightarrow R$ – линейное отображение. Постройте дифференциальный оператор порядка $\leqslant k$, ограничение которого на P_k равно Ψ.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, примените индукцию.

Задача 7.15 (!). Докажите, что алгебра дифференциальных операторов порождена t_i и $\frac{d}{dt_i}$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 7.12 и задачей 7.14.

Задача 7.16 (*). Пусть $R = k[t_1, ..t_n]$ - кольцо полиномов. Докажите, что алгебра $\operatorname{Diff}^*(R)$ порождена образующими $t_1, t_2, ...t_n, \frac{d}{dt_1}, \frac{d}{dt_2}, ...\frac{d}{dt_n}$, с соотношениями

$$[t_i, t_j] = 0, \quad \left[\frac{d}{dt_i}, \frac{d}{dt_j}\right] = 0, \qquad (i,\ j \text{ - любые})$$
$$\left[t_i, \frac{d}{dt_i}\right] = 1, \quad \left[\frac{d}{dt_i}, t_j\right] = 0 \qquad (i \neq j)$$

Задача 7.17 (*). Пусть R – конечно-порожденное кольцо над полем нулевой характеристики. Может ли случиться, что алгебра $\operatorname{Diff}^*(R)$ не порождена $\operatorname{Diff}^1(R)$?

7.3. Кольцо символов дифференциальных операторов

Определение 7.3. Пусть A - ассоциативная алгебра над полем, а

$$A_0 \subset A_1 \subset ...$$

набор вложенных подпространств, таких, что $A = \bigcup_i A_i$. Этот набор подпространств называется **фильтрацией** на алгебре, если $A_iA_j \subset A_{i+j}$. Из задачи 7.6 ясно, что дифференциальные операторы образуют алгебру с фильтрацией (фильтрованную алгебру).

Задача 7.18. Пусть $A = \bigcup_i A_i$ – алгебра с фильтрацией. Определим умножение на присоединенном градуированно пространстве $\bigoplus_i A_i/A_{i-1}$ таким образом, чтобы произведение классов $a \mod A_{i-1}$ и $b \mod A_{j-1}$ давало $ab \mod A_{i+j-1}$. Докажите, что это определение корректно, и задает структуру алгебры на $\bigoplus_i A_i/A_{i-1}$.

Определение 7.4. Алгебра $\bigoplus_i A_i/A_{i-1}$ называется **присоединенной градуированной алгеброй** алгебры с фильтрацией.

Задача 7.19. Найдите алгебру с фильтрацией, без делителей нуля, такую, что на присоединенной градуированной алгебре $\bigoplus_i A_i/A_{i-1}$ умножение зануляется для всех $i > 0$.

Задача 7.20 (*). Пусть R – конечно-порожденное коммутативное кольцо над k, $t_1, ..., t_n$ его образующие. Обозначим за $R^i \subset R$ подпространство, порожденное мономами степени не больше i. Докажите, что это фильтрация. Всегда ли R изоморфно присоединенному градуированному кольцу $\bigoplus_i R_i/R_{i-1}$?

Задача 7.21. Рассмотрим алгебру $\operatorname{Diff}^*(R)$ с фильтрацией

$$\operatorname{Diff}^0(R) \subset \operatorname{Diff}^1(R) \subset \operatorname{Diff}^2(R) \subset ...$$

Докажите, что ее присоединенная градуированная алгебра коммутативна.

Указание. Воспользуйтесь задачей 7.11.

Определение 7.5. Пусть R - кольцо, $\operatorname{Diff}^*(R)$ - алгебра дифференциальных операторов, а

$$\oplus S^i := \bigoplus_i \operatorname{Diff}^i(R)/\operatorname{Diff}^{i-1}(R)$$

– присоединенное градуированное кольцо. Это кольцо называется **кольцом символов дифференциальных операторов**. Его нулевая компонента $S^0 = \operatorname{Diff}^0(R)$ отождествляется с R, таким образом, кольцо символов является R-алгеброй.

Задача 7.22. Докажите, что кольцо символов коммутативно.

Задача 7.23. Докажите, что $\operatorname{Diff}^1(R)/\operatorname{Diff}^0(R)$ изоморфно пространству дифференцирований R.

Задача 7.24. Обозначим за $\operatorname{Der}(R)$ пространство дифференцирований на R, наделенное естественной структурой R-модуля. Постройте гомоморфизм колец

$$\bigoplus_i \mathsf{Sym}^i_R(\operatorname{Der}(R)) \longrightarrow \bigoplus_i S^i,$$

тождественный на $\operatorname{Der}(R)$.

Задача 7.25 (!). Докажите, что кольцо символов дифференциальных операторов на кольце многочленов $\mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ изоморфно симметрической алгебре от $2n$ переменных.

7.4. Дифференциальные операторы на гладких функциях

В этом разделе, $R = C^\infty\mathbb{R}^n$, а $t_1, ..., t_n$ – координатные функции.

Задача 7.26. Для каждого $a \in R$, обозначим оператор умножения на a за $L_a \in \operatorname{Diff}^0(R)$. Пусть $D \in \operatorname{Diff}^i(R)$ – дифференциальный оператор порядка i, который зануляется на полиномах, а P – полином от t_i. Докажите, что $[D, L_P]$ – дифференциальный оператор порядка $i-1$, который тоже зануляется на полиномах.

Задача 7.27. Пусть D – дифференциальный оператор на R, который зануляется на всех полиномах. Докажите, что $D(Pf) = PD(f)$, для любого полинома P.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.28. Пусть D - дифференциальный оператор порядка i, а $f \in \mathfrak{m}_x^{i+1}$, где $\mathfrak{m}_x \subset R$ – максимальный идеал точки $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что $D(f)$ зануляется в x.

Задача 7.29 (!). Докажите, что любой дифференциальный оператор, который зануляется на полиномах, равен нулю.

Указание. Для каждой функции $f \in R$, найдите полином P такой, что $f - P \in \mathfrak{m}_x^{i+1}$.

Задача 7.30 (!). Пусть $P_k \subset R$ – векторное пространство, порожденное мономами степени $\leqslant k$, а $\Psi : P_k \longrightarrow R$ – линейное отображение. Постройте дифференциальный оператор D ограничение которого на P_k равно Ψ. Представьте D как сумму мономов вида $f\frac{d}{dt_{i_1}}\frac{d}{dt_{i_2}}\frac{d}{dt_{i_3}}...\frac{d}{dt_{i_{k'}}}$, $k' \leqslant k$.

Указание. См. задачу 7.14.

Задача 7.31 (!). Докажите, что алгебра дифференциальных операторов на R порождена (над R) дифференцированиями вида $\frac{d}{d_i}$.

Указание. Выразите таким образом ограничение оператора на полиномы, и примените задачу 7.29.

7.5. Кольцо символов дифференциальных операторов на многообразии

В этом разделе, $R = C^\infty M$, где M – гладкое многообразие, а $\oplus S^i := \bigoplus_i \operatorname{Diff}^i(R)/\operatorname{Diff}^{i-1}(R)$ – кольцо символов дифференциальных операторов на R.

Задача 7.32.

а. Докажите, что $\mathsf{Sym}^i_R(\mathrm{Der}(R))$ изоморфно пространству однородных полиномов степени i на T^*M.

б. Выведите из этого, что алгебра $\bigoplus_i \mathsf{Sym}^i_R(\mathrm{Der}(R))$ это алгебра гладких функций на тотальном пространстве расслоения T^*M, полиномиальных на слоях этого расслоения.

Указание. Воспользуйтесь изоморфизмом $\mathrm{Der}\, R \cong TM$.

Задача 7.33. Пусть $x \in M$ - любая точка. Докажите, что пространство $\mathfrak{m}_x^i/\mathfrak{m}_x^{i+1}$ изоморфно симметрической степени $\mathsf{Sym}^i T_x^*M$.

Задача 7.34. Пусть $D \in \operatorname{Diff}^i(M)$ - дифференциальный оператор порядка $\leqslant i$.

а. Докажите, что D переводит идеал $\mathfrak{m}_x^{i+1}$ в $\mathfrak{m}_x$, и таким образом задает линейное отображение $\mathsf{Sym}^i T_x^*M \longrightarrow \mathbb{R}$, то есть элемент в $\mathsf{Sym}^i T_xM$.

б. Докажите, что это отображение зануляется на

$$\operatorname{Diff}^{i-1}(M) \subset \operatorname{Diff}^i(M).$$

в. [!] Докажите, что таким образом, для каждой точки $x \in M$, возникает гомоморфизм алгебр $\bigoplus S^i \xrightarrow{\Psi_x} \bigoplus \mathsf{Sym}^i T_xM$.

г. [!] Докажите, что $\Psi_x S^i$ гладко зависит от x

Замечание. Эта конструкция задает гомоморфизм алгебр

$$\bigoplus_i S^i \xrightarrow{\Psi} \bigoplus_i \mathsf{Sym}^i TM \tag{7.1}$$

Задача 7.35 (!). Пусть $v = \Phi(u) \in \bigoplus S^i$ лежит в образе гомоморфизма

$$\bigoplus_i \mathsf{Sym}^i TM \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_i S^i, \tag{7.2}$$

построенного в задаче 7.24. Докажите, что $\Psi(v) = u$.

Замечание. Мы получили, что $\Psi \circ \Phi = \mathsf{Id}$.

Задача 7.36.

а. Пусть $D \in \operatorname{Diff}^i(M)$ - такой дифференциальный оператор, что

$$D(\mathfrak{m}_x^i) \subset \mathfrak{m}_x$$

для любой точки x. Докажите, для любого $f \in \operatorname{Diff}^0(M)$, коммутатор $[D, f]$ переводит $D(\mathfrak{m}_x^{i-1})$ в $\mathfrak{m}_x$.

б. Воспользовавшись индукцией, выведите из этого, что D лежит в

$$\operatorname{Diff}^{i-1}(M).$$

Задача 7.37 (!). Докажите, что отображение $\bigoplus_i S^i \xrightarrow{\Psi} \bigoplus_i \mathsf{Sym}^i TM$ не имеет ядра.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

Задача 7.38 (!). Докажите, что отображение (7.2) - изоморфизм.

Задача 7.39 (!). Докажите, что $\operatorname{Diff}^k(C^\infty\mathbb{R}^n)$ изоморфно (как $C^\infty\mathbb{R}^n$-модуль) $\bigoplus_{i\leqslant k} S^i$.

Задача 7.40 (!). Докажите, что дифференциальные операторы $\operatorname{Diff}^k(M)$ на гладком многообразии M образуют векторное расслоение. Найдите его размерность, как функцию от k и $n = \dim M$.