Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Анализ 1: Гладкие многообразия.

1.1. Топологические многообразия

Замечание. Многообразия бывают *гладкие* (с заданным "классом гладкости"), *вещественно аналитические* и *топологические* (непрерывные). Эти классы многообразий определяются поразному. Когда хотят уточнить класс многообразия, его указывают, но обыкновенно это ясно из контекста.

Определение 1.1. Топологическое многообразие размерности n есть топологическое пространство, такое, что у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Пусть группа G действует на множестве M. **Стабилизатор** точки $x \in M$ есть подгруппа элементов в G, оставляющих на месте x, Действие группы на множестве **свободно**, если стабилизатор любой точки тривиален.

Замечание. Действие группы на топологическом пространстве предполагается по умолчанию непрерывным.

Задача 1.1. Конечная группа G свободно действует на хаусдорфовом многообразии M. Докажите, что факторпространство M/G – тоже многообразие.

Задача 1.2 (!). Приведите пример конечной группы, несвободно действующей на многообразии M, таким образом, что M/G не многообразие.

Задача 1.3. Рассмотрим фактор $\mathbb{R}^2$ по действию группы $\{\pm 1\}$, отображающей x в $-x$. Является ли факторпространство многообразием?

Задача 1.4 (*). Докажите, что n-мерная сфера S^n, n-мерное вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ и n-мерное комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ – многообразия.

Замечание. В определении многообразия, данном выше, не требуется отделимость, то есть оно множет быть нехаусдорфовым. Тем не менее, в большинстве случаев многообразия по умолчанию предполагаются хаусдорфовыми.

Задача 1.5. Приведите пример нехаусдорфова многообразия.

Задача 1.6. Докажите, что $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ – многообразие.

Задача 1.7. Пусть α – иррациональное число, а $\mathbb{Z}^2$ действует на $\mathbb{R}$ по формуле $t \longrightarrow t+m+n\alpha$. Докажите, что это действие свободно, но фактор $\mathbb{R}/\mathbb{Z}^2$ не является многообразием.

Задача 1.8 (**). Приведите пример многообразия M положительной размерности, такого, что для любых непустых открытых подмножеств M, их замыкания пересекаются, или докажите, что такого многообразия нет.

Задача 1.9 (**). Пусть $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ – компактная подгруппа. Докажите, что G это многообразие, и факторпространство $GL(n,\mathbb{R})/G$ – тоже многообразие.

1.2. Гладкие многообразия

Определение 1.2. **Покрытием** топологического пространства называется набор открытых множеств $\{U_i\}$ такой, что $\bigcup_i U_i = U$. **Измельчением** покрытия $\{U_i\}$ называется покрытие $\{V_i\}$ такое, что каждое V_i лежит в каком-то из U_i.

Задача 1.10. Докажите, что любые два покрытия топологического пространства имеют одинаковое измельчение.

Определение 1.3. Покрытие $\{U_i\}$ многообразия называется **атласом**, если для каждого U_i задано отображение $\phi_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$, которое задает гомеоморфизм из U_i на открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. **Отображения перехода** суть отображения

$$\Phi_{ij}: \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

индуцированные этими гомеоморфизмами. Атлас называется **гладким**, если все отображения перехода гладкие (класса C^∞, то есть бесконечно дифференцируемые), **гладким класса C^i,** если они дифференцируемы i раз, и **вещественно аналитическим**, если все отображения перехода локально разлагаются в ряд Тэйлора в каждой точке.

Определение 1.4. **Измельчение атласа** есть измельчение соответствующего покрытия $V_i \subset U_i$, с отображениями $\phi_i: V_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$, полученными ограничением из $\phi_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Два атласа (U_i, ϕ_i) и (U_i, ψ_i) (с одним и тем же покрытием) класса C^∞ или C^i называются **эквивалентными** в этом классе, если $\phi_i^{-1} \circ \psi_i$ определяет отображение этого класса на открытом подмножестве в $\mathbb{R}^n$. Два произвольных атласа называются эквивалентными, если у соответствующих покрытий есть общее измельчение, и соответствующие измельчения атласов эквивалентны.

Определение 1.5. **Гладкая структура на многообразии** (класса C^∞ или C^i) есть атлас класса C^∞ или C^i, заданный с точностью до эквивалентности. **Гладкое многообразие** есть топологическое многообразие с заданной на нем гладкой структурой.

Замечание. Ужасно, правда?

Задача 1.11 (*). Приведите пример двух неэквивалентных гладких структур на $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.6. **Гладкая функция** на многообразии M есть функция f, ограничение которой на карту (U_i, ϕ_i) дает гладкое отображение $\phi_i^{-1} \circ f$, заданное на открытом подмножестве $\phi(U_i) \subset \mathbb{R}^n$.

Замечание. Есть довольно много способов определить гладкое многообразие. Вышеприведенный метод – канонический, и его надо знать, но он не самый удобный. Два другие способа (через пучки функций и через теорему Уитни) приводятся дальше в листках.

Определение 1.7. Предпучок функций на топологическом пространстве M задается следующими данными. Для каждого открытого подмножества $U \subset M$, задано подкольцо $\mathcal{F}(U) \subset F(U)$ в кольце $F(U)$ функций на U, причем ограничение функции $\gamma \in \mathcal{F}(U)$ с открытого множества U на подмножество $U_1 \subset U$ принадлежит $\mathcal{F}(U_1)$. Предпучок функций называется **пучком**, если эти подкольца удовлетворяют следующему условию. Пусть $\{U_i\}$ – покрытие множества $U \subset M$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор функций, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию

$$f_i\Big|_{U_i \cap U_j} = f_j\Big|_{U_i \cap U_j},$$

для любой пары элементов покрытия. Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i.

Задача 1.12 (!). Пусть $\mathcal{F}$ – предпучок функций. Докажите, что он пучок тогда и только тогда, когда для любого покрытия $\{U_i\}$ множества $U \subset M$ имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{i \neq j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

Замечание. Точная последовательность есть последовательность абелевых групп и гомоморфизмов

$$\dots \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow \dots$$

такая, что ядро каждой стрелки совпадает с образом предыдущей стрелки.

Задача 1.13. Докажите, что следующие пространства функций на $\mathbb{R}^n$ являются кольцами и задают пучки функций.

а. Пространство непрерывных функций

б. Пространство бесконечно гладких функций.

в. Пространство i-кратно дифференцируемых функций

г. [*] Пространство функций, которые получаются как поточечный предел последовательности непрерывных функций.

д. Пространство функций, которые равны нулю вне множества нулевой меры.

Задача 1.14. Докажите, что на $\mathbb{R}^n$ следующие пространства функций являются предпучками, но не являются пучками.

а. Пространство постоянных функций

б. Пространство ограниченных функций

в. Пространство функций, зануляющихся вне ограниченного подмножества

г. [*] Пространство функций f, удовлетворяющих $|f| \leqslant |P|$ для какой-то полиномиальной функции P.

Определение 1.8. Окольцованное пространство $(M, \mathcal{F})$ есть топологическое пространство с заданным на нем пучком функций. **Морфизм** $(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Psi} (N, \mathcal{F}')$ окольцованных пространств есть непрерывное отображение $M \xrightarrow{\Psi} N$ такое, что для каждого открытого множества $U \subset N$ и функции $f \in \mathcal{F}(U)$, функция $\Psi \circ f$ лежит в кольце $\mathcal{F}'(\Psi^{-1}(U))$. **Изоморфизм** окольцованных пространств есть гомеоморфизм Ψ такой, что Ψ и Ψ^{-1} удовлетворяет этому условию (то есть является морфизмом окольцованных пространств).

Замечание. Довольно часто под "окольцованным пространством" понимают более общее понятие, где "пучок функций" не обязательно является подпучком в кольце функций на M, а является абстрактно заданным "пучком колец". Наше определение проще, но оно не вполне стандартное.

Задача 1.15. Пусть M, N – открытые подмножества в $\mathbb{R}^n$, а $\Psi: M \longrightarrow N$ – гладкое отображение. Докажите, что оно задает морфизм пространств, окольцованных гладкими функциями.

Задача 1.16. Пусть M – гладкое многообразие какого-то класса гладкости, а $\mathcal{F}$ – пространство функций этого класса гладкости. Докажите, что это пучок функций.

Задача 1.17 (!). Пусть M – топологическое многообразие, а (U_i, ϕ_i), (V_j, ψ_j) – гладкие структуры на M. Докажите, что они эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие пучки гладких функций совпадают.

Замечание. Из этой задачи сразу следует, что следующее определение равносильно Определению 1.5.

Определение 1.9. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – топологическое многообразие с заданным на нем пучком функций. Оно называется **гладким многообразием класса** C^i **или** C^∞, если у каждой точки $(M, \mathcal{F})$ есть окрестность, изоморфная окольцованному пространству $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}')$, где $\mathcal{F}'$ – функции той же гладкости на $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.10. Система координат на открытом подмножестве U многообразия $(M, \mathcal{F})$ есть изоморфизм между $(U, \mathcal{F})$ и открытым подмножеством в $\mathbb{R}^n, \mathcal{F}')$, где $\mathcal{F}'$ – функции той же гладкости на $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Чтобы избежать усложнения обозначений, отныне мы будем предполагать все гладкие многообразия хаусдорфовыми и бесконечно гладкими. Случай других классов гладкости рассматривается аналогично.

Задача 1.18. Пусть $(M, \mathcal{F})$ и $(N, \mathcal{F}')$ – гладкие многообразия, а $\Psi: M \longrightarrow N$ – непрерывное отображение. Докажите, что следующие условия равносильны

(а) В локальных координатах, Ψ задается гладким отображением

(б) Ψ является морфизмом окольцованных пространств.

Замечание. Изоморфизм гладких многообразий называется **диффеоморфизмом**. Это гомеоморфизм, который переводит гладкие функции в гладкие.

Задача 1.19 (*). Пусть $\mathcal{F}$ – предпучок функций на $\mathbb{R}^n$. Найдите минимальный пучок, который содержит $\mathcal{F}$, для следующих случаев а. Постоянные функции

б. Функции, равные нулю вне ограниченного подмножества

в. Измеримые функции с конечной мерой (по Лебегу)

г. Ограниченные функции

Задача 1.20 (*). Рассмотрим окольцованное пространство $(\mathbb{R}^n, C^i)$, с функциями, которые i-кратно дифференцируемы. Опишите все морфизмы из $(\mathbb{R}^n, C^{i+1})$ в $(\mathbb{R}^n, C^i)$.

1.3. Вложенные многообразия

Определение 1.11. Замкнутое вложение $N \hookrightarrow M$ топологических пространств есть гомеоморфизм топологического пространства N на его образ, который замкнут в M.

Определение 1.12. Пусть M – гладкое многообразие размерности m а $N \subset M$ – его подмножество. Оно называется **вложенным подмногообразием размерности** n, а $N \hookrightarrow M$ - **гладким вложением**, если у каждой точки $x \in N$ есть окрестность $U \subset M$, диффеоморфная $\mathbb{R}^m$, и такая, что $U \cap N$ переходит при этом диффеоморфизме в линейное подпространство размерности n. Если к тому же образ N замкнут, отображение $N \hookrightarrow M$ называется **замкнутым вложением**.

Задача 1.21 (!). Пусть $(M, \mathcal{F})$ – гладкое многообразие, а $N \subset M$ – вложенное подмногообразие. Рассмотрим пространство функций $\mathcal{F}'(U)$ на $U \subset N$, которые продолжаются до гладкой функции на M в некоторой окрестности U.

а. Докажите, что $\mathcal{F}'$ это пучок.

б. Докажите, что он задает структуру гладкого многообразия на N.

в. Докажите, что естественное вложение $(N, \mathcal{F}') \longrightarrow (M, \mathcal{F})$ является морфизмом многообразий.

Задача 1.22. Пусть N_1, N_2 два многообразия, $\phi_i : N_i \longrightarrow M$ – гладкие вложения. Предположим, что образ N_1 совпадает с образом N_2. Докажите, что эти многообразия изоморфны.

Замечание. В силу предыдущей задачи, для задания гладкой структуры на N достаточно гладко вложить его в $\mathbb{R}^n$. Как будет ясно из следующего листка, любое многообразие вкладывается в $\mathbb{R}^n$ (при соблюдении разумных условий), поэтому вместо гладкого многообразия можно пользоваться "многообразием, гладко вложенным в $\mathbb{R}^n$".

Задача 1.23. Постройте гладкое вложение из $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ в $\mathbb{R}^3$.

Задача 1.24 (*). Докажите, что $\mathbb{R}P^n$ нельзя гладко вложить в $\mathbb{R}^{n+1}$, для $n > 1$.

1.4. Разбиение единицы

Определение 1.13. Пусть $\{U_i\}$ – покрытие топологического пространства M. Оно называется **локально конечным**, если каждая точка M обладает окрестностью, которая содержится в конечном числе элементов покрытия.

Задача 1.25. Пусть дано локально конечное покрытие $\{U_i\}$ многообразия M, причем каждое из U_i гомеоморфно $\mathbb{R}^n$. Докажите, что у него есть локально конечное измельчение $\{V_i\}$, такое, что замыкание каждого V_i компактно в M.

Указание. Покройте каждое $U_i = \mathbb{R}^n$ объединением шаров радиуса 1 с центрами во всех целых точках.

Задача 1.26 (!). Пусть дано счетное, локально конечное покрытие $\{U_i\}$ многообразия M, причем каждое из U_i снабжено гомеоморфизмом $U_i \xrightarrow{\phi_i} \mathbb{R}^n$ и имеет компактное замыкание в M. Докажите, что существует набор чисел r_i такой, что $\phi_i^{-1}(B_{r_i})$ – тоже покрытие M, где B_{r_i} – открытый шар радиуса r_i с центром в 0.

Задача 1.27 (!). Пусть M – многообразие, допускающее счетное, локально конечное покрытие, причем каждый из элементов покрытия гомеоморфен $\mathbb{R}^n$. Докажите, что у этого покрытия есть локально конечное измельчение $\{U_i\}$, причем каждое U_i снабжено гомеоморфизмом $U_i \xrightarrow{\phi_i} \mathbb{R}^n$, а прообразы единичных шаров $\phi_i^{-1}(B_1)$ тоже покрывают M. Проверьте, что можно выбрать отображения ϕ_i гладкими, если M снабжено гладкой структурой.

Определение 1.14. Пусть M – гладкое многообразие, а $\{U_i\}$ – локально конечное покрытие. **Разбиением единицы, подчиненным покрытию** $\{U_i\}$ называется набор гладких функций $f_i: M \longrightarrow [0,1]$ с компактным носителем, пронумерованный тем же набором индексов, что U_i, и удовлетворяющий следующим условиям.

(а) Каждая из функций f_i зануляется вне соответствующего U_i

(б) $\sum_i f_i = 1$

Замечание. Отметим, что сумма $\sum_i f_i$ определена, потому что покрытие U_i локально конечно.

Задача 1.28. Докажите, что все производные функции $e^{-\frac{1}{x^2}}$ в нуле равны нулю.

Задача 1.29. Рассмотрим функцию λ на $\mathbb{R}^n$,

$$\lambda(x) := \begin{cases} \lambda(x) = e^{\frac{1}{|x|^2-1}} \text{ если } |x| < 1 \\ \lambda(x) = 0, \text{ если } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

Докажите, что λ гладкая, а все ее производные в точках единичной сферы равны нулю.

Задача 1.30. Пусть $\{U_i, \phi_i U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n\}$ – атлас на гладком многообразии M. Рассмотрим функцию $\lambda_i: M \longrightarrow [0,1]$,

$$\lambda_i(m) := \begin{cases} \lambda_i(m) = \lambda(\phi_i(m)), \text{ если } m \in U_i \\ \lambda(m) = 0, \text{ если } m \notin U_i \end{cases}$$

Докажите, что это гладкая функция.

Задача 1.31 (!). Пусть $\{U_i, \phi_i : \ U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n\}$ локально конечный атлас на многообразии M, такой, что $\{\phi_i^{-1}(B_1)\}$ тоже покрытие (такой атлас был построен в задаче 1.27). Рассмотрим функцию $\lambda_i : \ M \longrightarrow [0,1]$, построенную в предыдущей задаче. Докажите, что сумма $\sum_j \lambda_j$ нигде не равна нулю, а функции $\left\{f_i := \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j}\right\}$ задают разбиение единицы на M.

Задача 1.32 (!). Докажите, что любое многообразие со счетной базой допускает разбиение единицы.

1.5. Теорема Уитни для компактных многообразий

Определение 1.15. Определим $\mathbb{R}^\infty$ как объединение всех $\mathbb{R}^i$, вложенных друг в друга отображениями $(x_1, ..., x_n) \hookrightarrow (x_1, ..., x_n, 0)$

Задача 1.33 (*). Докажите, что это пространство не локально компактно

Задача 1.34. Докажите, что $\mathbb{R}^\infty$ является топологической абелевой группой (т.е. наделено коммутативной групповой операцией, в которой сложение непрерывно).

Задача 1.35 (*). Рассмотрим единичную сферу $S^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$. Докажите, что она стягиваема.

Задача 1.36 (*). Будет ли стягиваемо соответствующее проективное пространство $\mathbb{R}P^\infty = S^\infty/\{\pm 1\}$?

Задача 1.37. Пусть M – гладкое многообразие, $\{U_i, \phi_i : \ U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n\}$ локально конечный атлас, а f_i – подчиненное этому атласу разбиение единицы, такое, что $f_i = 0$ вне некоторого компактного подмножества U_i. Рассмотрим отображение $\Psi_i : \ M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\Psi_i(m) := \begin{cases} \Psi_i(m) = \Big(f_i(m)\phi_i(m), f_i(m)\Big), \text{ если } m \in U_i \\ \Psi_i(m) = (0, ..., 0) \text{ если } m \notin U_i \end{cases}$$

а. Докажите, что Ψ_i инъективно на множестве, где $f_i \neq 0$.

б. Пусть атлас $\{U_i\}$ конечен и состоит из m карт. Докажите, что $\bigoplus_i \Psi_i$ задает замкнутое вложение из M в $\mathbb{R}^{(n+1)m}$.

в. [*] Докажите, что $\bigoplus_i \Psi_i$ задает замкнутое вложение из M в $\mathbb{R}^\infty$, если число карт в атласе $\{U_i\}$ бесконечно.

Задача 1.38 (!). Докажите **теорему Уитни** (для компактных многообразий): каждое компактное многообразие допускает замкнутое, гладкое вложение в $\mathbb{R}^n$.

Задача 1.39 (*). Пусть $U \subset M$ – открытое подмножество гладкого многообразия, гомеоморфное $\mathbb{R}^n$, а $V \subset U$ - образ единичного шара. Постройте гладкое отображение M на единичную сферу S^n в $\mathbb{R}^{n+1}$, которое инъективно на V, и отображает дополнение к U_i в $(0,0,0,0,...,1)$.

Задача 1.40 (**). Докажите, что отображение, построенное в предыдущей задаче, обязательно сюрьективно.