Письменный экзамен

p-адические числа, модулярные формы и их приложения

Курс для студентов 3-5 курса НМУ, аспирантов и научных сотрудников

Проф. д.ф.-м.н. А. А. Панчишкин
(Laboratoire J.-V.Poncelet /Институт Фурье, Гренобль, Франция)

1. Доказать неравенство $\left|\binom{a}{b}\right|_p \le \left|\frac{a}{b}\right|_p$ для p-адической нормы с $|p|_p = \frac{1}{p}$ и $a, b \in \mathbb{N}$. Вычислить $\mathrm{ord}_p\binom{a}{b}$.

2. Найти многоугольники Ньютона первого и второго рода для многочлена $(1+X)^{p^3} - 1 \in \mathbb{Z}_p[X]$.

3. Рассмотрим ряды

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = 1 + \log(1+px) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(px)^n}{n}, \qquad (1)$$

$$g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \exp(p^2 x). \qquad (2)$$

(a) Найти радиус сходимости рядов $f(X)$ и $g(X)$ в поле $\mathbb{C}_p$.

(b) Положим

$$h_m(X) = f(X)((1+X)^{p^{7m}} - 1) + g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} X^n.$$

Показать, что:

Для всех n существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} c_{m,n} = c_n$;

(c) Найти радиус сходимости ряда: $h(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$.

(d) Показать, что для всех $x \in \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x|_p < 1\}$ справедливо равенство $\lim\limits_{m\to\infty} h_m(x) = g(x)$.

4. Рассмотрим распределение $\mu(a + (p^N))$ на $\mathbb{Z}_p$ со значениями в $\mathbb{Z}_p$.

(a) Показать, что для всех $t \in \{t \in \mathbb{C}_p \mid |t|_p < 1\}$ существует следующий предел:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{a=0}^{p^m-1} (1+t)^a \mu(a + (p^m)).$$

(b) Положим

$$F_m(T) = \sum_{a=0}^{p^m-1} (1+T)^a \mu(a + (p^m)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} T^n.$$

Показать, что для всех n существует $A_n = \lim_{m\to\infty} A_{m,n}$.

(c) Пусть $u \in \mathbb{C}_p$. Показать,что $\lim_{m\to\infty} u^{p^m} = 1$ тогда и только тогда, когда $|u-1|_p < 1$. Показать,что для всех $x \in \mathbb{Z}_p$ выражение $\chi_{(t)}(x) = (1+t)^x$ определяет аддитивный характер группы $\mathbb{Z}_p$ (то есть гомоморфизм $\chi_{(t)} : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p^*$) посредством p–адического предела $(1+t)^x = \lim_{a\to x}(1+t)^a$, $a \in \mathbb{N}$.

(d) Показать, что ряд $F(T) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T^n$ сходится в открытом диске $\{t \in \mathbb{C}_p \mid |t|_p < 1\}$ и что $F(t)$ совпадает с интегралом $\int_{\mathbb{Z}_p} \chi_{(t)}(x) d\mu(x)$.

5. (a) Пусть M положительное число, $f : \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Q}}$ периодическая функция периода M (то есть $f(x+M) = f(x)$). Обобщенное число Бернулли $B_{k,f}$ определяется из равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k,f}}{k!} t^k = \sum_{a=1}^{M} \frac{f(a) t e^{at}}{e^{Mt}-1}.$$

Показать, что $B_{k,f} = M^{k-1} \sum_{a=1}^{M} B_k\left(\frac{a}{M}\right)$ где $B_k(X) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B_i X^{k-i}$ многочлен Бернулли.

(b) Обобщенный многочлен Бернулли $B_{k,f}(X)$ определяется из равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{k,f}(X) \frac{t^k}{k!} = \sum_{a=1}^{M} f(a) \frac{t\, e^{(a+X)t}}{e^{Mt}-1}$$

Показать, что для всех $k \geq 1$ имеем

$$B_{k,f}(X) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f(a) B_{i,f} X^{k-i} = B_{k,f} + k B_{k-1,f} X + \cdots + B_{0,f} X^k$$

(c) Рассмотрим обобщенную сумму степеней

$$S_{k,f}(M) = \sum_{a=1}^{M} f(a) a^k.$$

Показать, что

$$\frac{1}{k}[B_{k,f}(M) - B_{k,f}(0)] = S_{k-1,f}(M),$$

(d) Положим $f(n) = \exp(\frac{2\pi i n}{3})$, $M = 3$. Найти 13-адический предел

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{3 \cdot 13^m} S_{3,f}(3 \cdot 13^m).$$

6. (a) Описать четные характеры Дирихле $\chi \bmod 1001$. Какие из этих характеров имеют порядок 2?

   (b) Для всех четных характеров $\chi \bmod 1001$ порядка 2 вычислить числа Бернулли-Леопольдта $B_{2,\chi}$.

7. Пусть χ нетривиальный характер Дирихле mod N такой, что $p^3 \nmid N$ но $p^2 | N$ и пусть

$$L_p(s,\chi) = \frac{1}{N}\frac{1}{s-1}\sum_{\substack{a=1\\ p\nmid N}}^{N} \chi(a)\langle a\rangle^{1-s}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{1-s}{j}\cdot B_j\cdot\left(\frac{N}{a}\right)^j$$

   соответствующая p–адическая L–функция, где $a = \omega(a)\langle a\rangle$, ω обозначает характер Тейхмюллера.

   (a) Доказать, что для всех $s \in \mathbb{Z}_p$ справедливо разложение

$$L_p(s,\chi) = a_0 + a_1(s-1) + a_2(s-1)^2 + \cdots$$

   где

$$a_0 = \sum_{\substack{a=1\\ p\nmid N}}^{N} \chi(a)\left(\frac{1}{N}\log_p\langle a\rangle - \frac{1}{2a} - \frac{N}{12a^2}\right).$$

   (b) Вычислить $L_3(-1,\chi_3)$ где $\chi_3(n) = \binom{n}{3}$ (символ Лежандра).

   (c) Пусть $n \not\equiv -1 \bmod (p-1)$, n нечетное число. Похазать, что

$$B_{1,\omega^n} \equiv \frac{B_{n+1}}{n+1} (\mathrm{mod} p)$$

   где ω – характер Тэйхмюллера.

8. a) Показать, что для всех $N \in \mathbb{N}$ главная конгруэнц–подгруппа $\Gamma(N)$ является нормальной подгруппой в $\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, и что $\Gamma_1(N)$ является нормальной подгруппой в $\Gamma_0(N)$.

   b) Вычислить индекс подгруппы $\Gamma_0(100)$ в группе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

9. a) Для пары $(a_1, a_2) \bmod N$, $k > 2$ положим

$$G_k(z; a_1, a_2, N) = \sum_{\substack{m_1\equiv a_1 \bmod N\\ m_2\equiv a_2 \bmod N}} {}'(m_1 z + m_2)^{-k},$$

   где штрих означает, что суммирование ведется по парам $(m_1, m_2) \neq (0, 0)$. Показать, что этот ряд определяет модулярную форму веса k относительно главной конгруэнц-подгруппы $\Gamma(N)$ уровня N.

b) Найти разложение Фурье ряда Эйзенштейна

$$G_k(z; a_1, a_2, N) = \delta\left(\frac{a_1}{N}\right) \sum_{m_2 \equiv a_2 \bmod N} m_2^{-k} \tag{3}$$

$$+ \frac{(-2\pi i)^k}{N^k (k-1)!} \sum_{\substack{mm_1 > 0 \\ m_1 \equiv a_1 \bmod N}} m^{k-1} \mathrm{sgn} \zeta_N^{a_2 m} q^{mm_1/N}, \tag{4}$$

где $\zeta_N = \exp(2\pi i/N)$, $\delta(x) = 1$ для $x \in \mathbb{Z}$, и $\delta(x) = 0$ в противном случае. Использовать разложение

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (mz+n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\ k-1} e^{2\pi i n m z} \quad (k \geq 2,\ m \neq 0)$$

10. Пусть ω обозначает характер Тэйхмюллера mod$p$ со значениями в $\mathbb{Z}[\zeta_{p-1}]$ причем $\zeta_p = \exp(2\pi i/p)$, и $\omega(x) \equiv x(\mathrm{mod} p)$. Показать, что при вложении $\mathbb{Z}[\zeta_{p-1}] \subset \mathbb{Z}_p$ ряд

$$G_1(p, \omega^{-1}) = 1 + \frac{2}{L(0, \omega^{-1})} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} \omega^{-1}(d) q^n =$$

$$1 - \frac{2}{B_{1,\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} \omega^{-1}(d) q^n \tag{5}$$

сравним с 1 mod$p\mathbb{Z}[[q]]$.

11. Преобразованием Меллина функции $f = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \exp(2\pi i n z)$ $(\mathrm{Im}(z) > 0)$ называется ряд Дирихле $L(f, s) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) n^{-s}$. Разложить в эйлеровское произведение по простым числам преобразование Меллина ряда Эйзенштейна $f = G_k(N, \psi) = \frac{L(1-k,\psi)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} \psi(d) d^{k-1} q^n$ где $k \geq 4$. Найти область абсолютной сходимости ряда $L(f, s)$.

12. Доказать сравнение Рамануджана

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+,\ \tau(n) \equiv \sum_{d|n} d^{11} \mathrm{mod}\ 691.$$

где $\tau(n)$ определена равенством

$$q \prod_{m \geq 1} (1 - q^m)^{24} = \sum_{n \geq 1} \tau(n) q^n = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \cdots .$$

(Разложить E_6^2 по базису E_{12}, Δ пространства модулярных форм веса 12 относительно группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, где $E_k = -\dfrac{2k}{B_k} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d^{k-1} q^n$ ряд Эйзенштейна веса k).

Список задач и тем дипломных и диссертационных работ

1. Построение допустимых p-адических семейств L-функций Ранкина (методом модулярных распределений, с использованием работы M.Vienney (ENSL)).

2. Построение стандартных p-адических L-функций нечетного рода (метод модулярных распределений, с использованием работы (S.Boecherer– C.-G.Schmidt, AnnIF, 1999))

3. Вычисление специальных значений тройных произведений Гарретта с характерами Дирихле, доказательство сравнений (с использованием работы (Boecherer S., Panchishkin A.A., Documenta Math. Extra volume : John H.Coates' Sixtieth Birthday (2006), 77-132.))

4. Построение p-адических семейств зигелевых модулярных форм рода три посредством подъема Икеды-Миявакм p-адических семейств эллиптических модулярных форм (с использованием работ H.Kawamura, T.Ikeda, I. Miyawaki)

5. Построение p-адических L-функций семейств зигелевых модулярных форм рода три, интерполирующих стандартные и спинорные L-функции F_{12} и F_{14} (с использованием работ H.Kawamura, T.Ikeda, I.Miyawaki)

6. Вычисление специальных значений стандартных p-адических L-функций с характерами Дирихле (с использованием диссртации К.Ванькова и компьютерных программ SAGE и ComputeL (T.Dokshitzer))

7. Вычисление специальных значений p-адических L-функций допустимых семейств, и их производных (с использованием метода модулярных распределений вместо модулярных символов, использованных в статьях Robert Pollack and Glenn Stevens, Computations with overconvergent modular symbols; Robert Pollack, Efficient computations of p-adic L-functions via overconvergent modular symbols (and applications to Stark-Heegner points), http://math.bu.edu/~rpollack/)

8. Вычисление специальных значений стандартных p-адических L-функций и их производных (с использованием метода модулярных распределений).

Список литературы

[Ike01] Ikeda, T., *On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree* $2n$, Ann. of Math. (2) 154 (2001), 641-681.

[Ike06] Ikeda, T., *Pullback of the lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki's Conjecture* Duke Mathematical Journal, **131**, 469-497 (2006)

[Kawa] Kawamura, Hisa-aki, Private communication. (Hokkaido University (Sapporo, Japan)/ Institute Fourier (Grenoble, France)), July 2008.

[Mi92] Miyawaki, I., Numerical examples of Siegel cusp forms of degree 3 and their zeta-functions, *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University*, Ser. A, Vol. 46, No. 2 (1992), pp. 307–339.

p-адические числа, модулярные формы и их приложения

А. А. Панчишкин (Laboratoire J.-V.Poncelet /Институт Фурье, Гренобль, Франция)

Предлагаемый курс рассчитан на студентов и аспирантов, желающих познакомиться с теорией p-адических L-функций, связанных с модулярными формами, а также с их приложениями в диофантовой геометрии. Рассматриваются локальные и глобальные методы в арифметике. Дается обзор теории p-адических семейств модулярных форм, а также открытых проблем и задач теории p-адических L-функций.

Программа:

1. Сравнения и p-адические числа, лемма Гензеля. Поле Тэйта.
2. Непрерывные и аналитичические функции. Критерий Малера. Многоугольники Ньютона.
3. Меры, распределения и алгебра Ивасавы. Сравнения Куммера и p-адическая L-функция Куботы-Леопольдта.
4. Модулярные формы и L-функции.
5. Представления Галуа и сравнения между модулярными формами.
6. Метод проекции модулярных распределений. Примеры построения p-адических L-функций.

7 Обзор приложений к проблемам диофантовой геометрии.

8. Открытые проблемы и задачи в теории p-адических L-функций.

Список литературы

1. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. Изд. 3е, доп. М.: Наука, 1985.
2. Коблиц Н. p-адические числа, p-адический анализ и дзета функции. М.: Мир, 1982.
3. Серр Ж.-П. Курс арифметики. М.: Мир, 1972.
4. Manin Yu.I. and Panchishkin A.A., Introduction to Modern Number Theory, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 49 (2nd ed.), Springer-Verlag, 2005, 514 p. (Русск. пер. М.: МЦНМО, 2008.)
5. Панчишкин А. А.. Локальные и глобальные методы в арифметике. Математическое просвещение, сер. 3, вып. 12, 2008 (55-79)
6. Панчишкин А. А.. Модулярные формы и p-адические числа. arXiv:0709.1611 (2007)
7. Panchishkin A.A.. A new method of constructing p-adic L-functions associated with modular forms, Московский Математический Журнал, 2 (2002), N 2, 1-16
8. Boecherer S., Panchishkin A.A. Admissible p-adic measures attached to triple products of elliptic cusp forms, Documenta Math. Extra volume : John H.Coates' Sixtieth Birthday (2006), 77-132.

Независимый Московский Университет,
Большой Власьевский пер. 11,
119002 Москва Российская Федерация