Листок 1

Теоремы, которыми можно пользоваться без доказательства

Теорема 1. Для любого $a > 0$ существует единственная непрерывная функция a^x, определённая для всех действительных чисел, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

и такая, что $a^1 = a$.

Теорема 2. Для любого положительного $a \neq 1$ существует единственная непрерывная функция $\log_a x$, определённая для всех положительных чисел, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

и такая, что $\log_a a = 1$.

Теорема 3. Монотонная ограниченная последовательность чисел имеет предел.

Основные задачи

Серия 1.

1.1. Расшифровать следующие записи

- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$;
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$;
- $\lim_{x\to a+0} f(x) = a$.

1.2. Пусть $\lim_{x\to p} f(x) = a$ и $\lim_{x\to p} g(x) = b$. Докажите, что $\lim_{x\to p}(f(x) - g(x)) = a - b$.

1.3. Докажите, что не существует предела $\lim_{x\to+\infty} \sin x$.

1.4. Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ — три последовательности такие, что $a_n \leq b_n \leq c_n$ при всех n, причём $\lim a_n = \lim c_n = p$ (в частности, оба этих предела существуют). Докажите, что $\lim b_n$ тоже существует и равен p.

1.5. Пусть $\lim_{x\to c} f(x) = a \neq \infty$. Докажите, что существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $M > 0$, что $|f(x)| < M$ при всех x таких, что $|x - c| < \varepsilon$.

1.6. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$.

1.7. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} |1/a_n| = +\infty$.

1.8. Пусть $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = a$, $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = b$, причём $b \neq 0$. Докажите, что $\lim_{|x|\to\infty}(f(x)/g(x)) = a/b$.

1.9. Пусть $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ при нечетных n и $a_n = \frac{6n-11}{3n+1}$ при четных n. Найдите $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Серия 2.

2.1. Докажите, что при целых n и $x > -1$ выполнено неравенство

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

2.2. Ограничена ли последовательность

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\,?$$

2.3. Тот же вопрос про последоваательность

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

2.4. … и про последовательность

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^{1,5}} + \frac{1}{3^{1,5}} + \ldots + \frac{1}{n^{1,5}}\,.$$

2.5. Последовательность $\{x_n\}$ задана соотношениями $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Докажите, что эта последовательность монотонна и ограничена, найдите её предел.

2.6. Найдите пределы следующих последовательснотей:

1. $(n+1)^{100}/(n^{100}+1)$;
2. $n^{100}/2^n$;
3. $a^{1/n}$;
4. $\sqrt[n]{n}$;
5. $n!/n^n$;
6. $\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n+4^n}{5^n+6^n}}$.

2.7. Докажите, что при $a > 1$ и $x > y$ выполнено $\log_a x > \log_a y$.

2.8. Докажите, что $a^{xy} = (a^x)^y$, $\log_a x^b = b \log_a x$.

2.9. Докажите, что при $a > 1$ $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$, а при $a < 1$ $\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$.

Дополнительные задачи

Определение. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если у любых двух различных точек есть непересекающиеся окрестности.

Пусть X — множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц. Мы будем обозначать элементы X греческими буквами. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — *конечная* последовательность из нулей и единиц. Положим

$$X_a = \{\xi \in X \mid \xi_1 = a_1, \ldots, \xi_n = a_n\}\,.$$

3.1.

1. Рассмотрим на X топологию, в которой базу открытых подмножеств составляют множества X_a для всевозможных конечных последовательностей a (всевозможных длин). (Эта топология называется топологией Тихонова.) Покажите, что пространство X хаусдорфово в топологии Тихонова.

2. Сформулируйте и докажите критерий сходимости последовательности элементов пространства X.

3. Покажите, что X обладает базой окрестностей, состоящих из открыто-замкнутых множеств (т. е. из открытых множеств, которые являются одновременно и замкнутыми).

4. Существует ли на X метрика, задающая топологию Тихонова?