(Ко)гомологии с коэффициентами

Задача 8.1. Докажите, что группа $H^1(X)$ не содержит кручения.
Задача 8.2. Пусть $A, B \subset X$ — подпространства, внутренности которых покрывают X. Выведите *когомологическую точную последовательность Майера–Виеториса*:

$$\ldots \longrightarrow H^n(X) \xrightarrow{\psi^*} H^n(A) \oplus H^n(B) \xrightarrow{\varphi^*} H^n(A \cap B) \xrightarrow{d} H^{n+1}(X) \longrightarrow \ldots$$

и опишите явно кограничное отображение $d\colon H^n(A \cap B) \to H^{n+1}(X)$.
Задача 8.3. Определим $d^n\colon H^n(X^n, X^{n-1}; G) \to H^{n+1}(X^{n+1}, X^n; G)$ как композицию отображений $j^*\colon H^n(X^n, X^{n-1}; G) \to H^n(X^n; G)$ и $d\colon H^n(X^n; G) \to H^{n+1}(X^{n+1}, X^n; G)$ из когомологических точных последовательностей пар. Докажите, что комплексы $\{H^n(X^n, X^{n-1}; G), d^n\}$ и $\{\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_n(X), G), \partial_n^*\}$ изоморфны.
Задача 8.4. Вычислите группы целочисленных когомологий $H^k(\mathbb{R}P^n)$ и $H^k(\mathbb{R}P^\infty)$.
Задача 8.5. Опишите гомоморфизм Бокштейна $\beta\colon H^k(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \to H^{k+1}(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$.

Функторы Tor и Ext

Задача 8.6. Докажите, что модули $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$ и $\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$ не зависят, с точностью до изоморфизма, от выбора свободной резольвенты модуля M.
Задача 8.7. Докажите, что $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N$ и $\mathrm{Ext}_R^0(M, N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$.
Задача 8.8. Докажите, что $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_n^R(N, M)$.
Задача 8.9. По короткой точной тройке R-модулей

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

постройте длинные точные последовательности функторов Tor и Ext. даёт следующие длинные точные последовательности:

$$\begin{aligned}
\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(M_1, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(M_3, N) \longrightarrow \ldots\\
\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M_1, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M_3, N) \longrightarrow\\
\longrightarrow \mathrm{Tor}_0^R(M_1, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_0^R(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_0^R(M_3, N) \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(M_3, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(M_1, N) \longrightarrow\\
\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M_3, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M_1, N) \longrightarrow \ldots\\
\ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^i(M_3, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^i(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^i(M_1, N) \longrightarrow \ldots,
\end{aligned}$$

а короткая точная последовательность R-модулей

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$$

даёт длинную точную последовательность

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(M, N_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(M, N_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(M, N_3) \longrightarrow\\
\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M, N_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M, N_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M, N_3) \longrightarrow \ldots\\
\ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^i(M, N_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^i(M, N_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^i(M, N_3) \longrightarrow \ldots.
\end{aligned}$$

Задача 8.10. Для $\mathbb{Z}$-модулей $\mathbb{Z}_m$, $\mathbb{Z}_n$ и $\mathbb{Z}$ вычислите всевозмножные их Tor'ы и Ext'ы.
Задача 8.11. Вычислите $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ и $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}_4}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$.
Задача 8.12. Используя формулу универсальных коэффициентов докажите, что если отображение пространств $f\colon X \to Y$ индуцирует изоморфизм целочисленных гомологий, то оно индуцирует изоморфизм гомологий с коэффициентами в любой абелевой группе G.