Произведения Уайтхеда

Задача 7.1. Докажите, что приклеивающее отображение $w\colon S^{k+l-1}\to S^k\vee S^l$ для $(k+l)$-клетки произведения $S^k\times S^l$ задаётся композицией

$$S^{k+l-1}=\partial(D^k\times D^l)=D^k\times S^{l-1}\cup_{S^{k-1}\times S^{l-1}} S^{k-1}\times D^l\to S^k\vee S^l,$$

где последнее отображение состоит из двух проекций

$$\begin{gathered}D^k\times S^{l-1}\to D^k\to D^k/S^{k-1}=S^k\hookrightarrow S^k\vee S^l \quad \text{и}\\ S^{k-1}\times D^l\to D^l\to D^l/S^{l-1}=S^l\hookrightarrow S^k\vee S^l\end{gathered}$$

и переводит $S^{k-1}\times S^{l-1}$ в отмеченную точку.

Задача 7.2. Докажите, следующие свойства произведений Уайтхеда и Самельсона:

а) $[\cdot,\cdot]_W\colon \pi_1\times\pi_1\to\pi_1$ — коммутатор;

б) для топологической группы $[\alpha,\beta]_W=0$, для любых α и β;

в) $[\alpha,\beta+\gamma]_W=[\alpha,\beta]_W+[\alpha,\gamma]_W$ для $|\beta|=|\gamma|>1$; **г)** $[\alpha,\beta]_W=(-1)^{|\alpha||\beta|}[\beta,\alpha]_W$;

д) $(-1)^{|\alpha||\gamma|}[[\alpha,\beta]_W,\gamma]_W+(-1)^{|\beta||\alpha|}[[\beta,\gamma]_W,\alpha]_W+(-1)^{|\beta||\gamma|}[[\gamma,\alpha]_W,\beta]_W=0$ при $|\alpha|,|\beta|,|\gamma|>1$;

е) при подходящем выборе изоморфизма $t\colon \pi_n(X)\to\pi_{n-1}(\Omega X)$ выполнено $t[\alpha,\beta]_W=(-1)^{|\alpha/-1}[t\alpha,t\beta]_S$.

Указание. Решение последних двух пунктов не стыдно посмотреть в книжке или статье, например, Hans Samelson. *A Connection Between the Whitehead and the Pontryagin Product.*

ж) Композиция $\pi_k(X)\times\pi_l(X)\xrightarrow{[\cdot,\cdot]_W}\pi_{k+l-1}(X)\xrightarrow{h}H_{k+l-1}(X)$ тривиальна

з) Композиция $\pi_k(X)\times\pi_l(X)\xrightarrow{[\cdot,\cdot]_W}\pi_{k+l-1}(X)\xrightarrow{\Sigma}\pi_{k+l}(\Sigma X)$ тривиальна.

▷ В частности, если X — $(n-1)$-связное клеточное пространство, то произведения Уайтхеда $[\alpha,\beta]_w$ классов $\alpha,\beta\in\pi_n(X)$ лежат в ядре гомоморфизма надстройки $\Sigma\colon\pi_{2n-1}(X)\to\pi_{2n}(\Sigma X)$ в «пограничной» размерности, который является эпиморфизмом согласно теореме Фрейденталя. «Трудная часть» теоремы Фрейденталя утверждает, что ядро этого эпиморфизма порождено классами вида $[\alpha,\beta]_w$.

Задача 7.3. Обозначим через ι_n каноническую образующую группы $\pi_n(S^n)$ и через η_2 — каноническую образующую группы $\pi_3(S^2)$, т. е. класс отображения Хопфа $S^3\to S^2$. Покажите, что $[\iota_2,\iota_2]_w=2\eta_2$.

Задача 7.4. Докажите, что $\pi_4(S^3)\cong\mathbb{Z}_2$ или 0.

Указание. Рассмотрите гомоморфизм надстройки $\pi_3(S^2)\to\pi_4(S^3)$ и используйте две предыдущие задачи.

Трудная часть теоремы Фрейденталя даёт $\pi_1^s=\pi_4(S^3)\cong\mathbb{Z}_2$.

Задача 7.5. Приведите пример $(n-1)$-связной пары (X,A), $n\geq 2$, с неодносвязным A, для которой $h\colon\pi_n(X,A,x_0)\to H_n(X,A)$ не является изоморфизмом.

Задача 7.6. Покажите, что проекция

$$S^1\times S^1\to(S^1\times S^1)/(S^1\vee S^1)=S^2$$

индуцирует тривиальный гомоморфизм в гомотопических группах, но нетривиальный гомоморфизм в группах гомологий.

Задача 7.7. Покажите, что проекция $p\colon S^3\to S^2$ расслоения Хопфа индуцирует тривиальный гомоморфизм в группах гомологий, но нетривиальный гомоморфизм в гомотопических группах.

Задача 7.8. Докажите, что если X односвязно и $H_i(X)\cong H_i(S^n)$ для любого n, то $X\simeq S^n$.

Задача 7.9. Покажите, что условие односвязности пространств X и Y в гомологической теореме Уайтхеда существенно.

Задача 7.10. Приведите пример отображения связных клеточных пространств $f\colon X\to Y$, для которого $f_*\colon\pi_1(X)\to\pi_1(Y)$ — изоморфизм и $f_*\colon H_n(X)\to H_n(Y)$ — изоморфизм для любого n, но f не является слабой гомотопической эквивалентностью.

▷ Можно доказать, что такое f будет гомотопической эквивалентностью, если группы $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$ абелевы и тривиально действуют на высших гомотопических группах.