Лекция 7.1: Обобщённый τ-инвариант

В этой лекции мы обсудим обобщённый τ-инвариант, введённый Д. Воганом [Vog]. Фиксируем пару соседних корней α, β в диаграмме Дынкина $\mathfrak{g}$ (т.е. $\alpha, \beta \in \Pi$, для которых $(\alpha, \beta) \neq 0$). Положим

$$D_{\alpha\beta} := \{w \in W \mid \alpha \notin \tau(w), \beta \in \tau(w)\}.$$

Определим на множестве $D_{\alpha\beta}$ функцию $T_{\alpha\beta}$ по следующему правилу:

$$T_{\alpha\beta}(w) = \begin{cases} ws_\alpha & \text{если } \beta \notin \tau(ws_\alpha) \\ ws_\beta & \text{иначе} \end{cases}.$$

Задача 1. а) Образ $T_{\alpha\beta}$ лежит в $D_{\beta\alpha}$.

б) Преобразования $T_{\alpha\beta}$ и $T_{\beta\alpha}$ взаимнообратны и задают биекцию между $D_{\alpha\beta}$ и $D_{\beta\alpha}$.

Определение 1. Обобщённым τ-инвариантом w называется неупорядоченный список всех цепочек $T_{\alpha_1\beta_1}, ..., T_{\alpha_s\beta_s}$, для которых

$$T_{\alpha_{i-1}\beta_{i-1}}...T_{\alpha_1\beta_1}w \in D_{\alpha_i\beta_i} \forall i \leq s.$$

Определение 2. Обобщённым τ-инвариантом w называется неупорядоченный список всех цепочек $T_{\alpha_1\beta_1}, ..., T_{\alpha_s\beta_s}$, для которых

$$T_{\alpha_{i-1}\beta_{i-1}}...T_{\alpha_1\beta_1}w \in D_{\alpha_i\beta_i} \forall i \leq s.$$

Замечание 1. Все подпути длины 1 в обобщённом τ-инварианте для $w \in W$ дают все пары (α, β), для которых $w \in D_{\alpha\beta}$. Легко видеть, что по этим данным можно восстановить τ-инвариант, если диаграмма дынкина Π связна и $w \neq e$.

Теорема 1. а) Пусть $w_1, w_2 \in W$ таковы что $I(w_1\rho - \rho) = I(w_2\rho - \rho)$ и $w_1, w_2 \in D_{\alpha\beta}$. Тогда

$$I(T_{\alpha\beta}(w_1)\rho - \rho) = I(T_{\alpha\beta}(w_2)\rho - \rho).$$

б) Пусть $w_1, w_2 \in W$ таковы что $I(w_1\rho - \rho) = I(w_2\rho - \rho)$. Тогда обобщённые τ-инварианты w_1 и w_2 совпадают.

Очевидно, что из а) следует б). Для доказательства Теоремы 1 мы свяжем обобщённый инвариант с функторами трансляции. Для этого нам нужно напомнить какое-то количество утверждений из предыдущей лекции.

Лемма 1. Имеем $F_{0,-\omega_\alpha}L(w\rho - \rho) = 0 \iff w\alpha \in \Delta^+ \iff \alpha \in \tau(w)$.

А также что

Лемма 2. Для всякого доминантного веса $\lambda \in \mathbb{Z}P^+$ верно, что

а) Функтор $F_{0,\lambda}$ индуцирует биекцию

$$\{\text{идеалы } I = I(w\rho - \rho), w \in W \mid F_{0,\lambda}L(w\rho - \rho) \neq 0\} \leftrightarrow \{\text{идеалы } I = I(w(\lambda + \rho) - \rho), w \in W\},$$

б) $F_{0,\lambda}L(w\rho - \rho) = 0 \iff ((\lambda + \rho, \alpha) \neq 0 \forall \alpha \in \tau(w)$.

Нам потребуется следующая версия этой леммы.

Следствие 1. Для всякого корня $\alpha \in \Pi$ верно, что

а) Функтор $F_{0,-\omega_\alpha}$ индуцирует биекцию

$$\{\text{идеалы } I = I(w\rho - \rho), w \in W \mid F_{0,-\omega_\alpha}L(w\rho - \rho) \neq 0\} \leftrightarrow \{\text{идеалы } I = I(w(-\omega_\alpha + \rho) - \rho), w \in W\}$$

б) $F_{0,-\omega_\alpha}L(w\rho - \rho) = 0 \iff \alpha \in \tau(w)$.

Ключевую роль в доказательстве Теоремы 1 играет следующая лемма.

Лемма 3. Если $w \in D_{\alpha\beta}$, то $F_{0,-\omega_\beta}F_{-\omega_\alpha,0}F_{0,-\omega_\alpha}L(w\rho - \rho) = L(T_{\alpha\beta}(w)(-\omega_\beta + \rho) - \rho)$.

Следствие 2. Пусть $w_1, w_2 \in W$ таковы что $I(w_1\rho - \rho) = I(w_2\rho - \rho)$ и $w_1, w_2 \in D_{\alpha\beta}$. Тогда

$$I(T_{\alpha\beta}(w_1)(-\omega_\beta + \rho) - \rho) = I(T_{\alpha\beta}(w_2)(-\omega_\beta + \rho) - \rho).$$

Теорема 1 мгновенно выводится из Следствия 2.

Замечание 2. Хотя обобщённый τ-инвариант устроен заметно сложнее, чем обычный τ-инвариант, он всё равно является достаточно легко вычислимым объектом (это примерно конечный раскрашенный граф с отмеченной вершиной). Обычный τ-инвариант не разделяет всех идеалов в $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(n))$, а обобщённый — разделяет. Для типов B и D у обобщённого τ-инварианта есть обобщение (это дурной стиль в любом языке, но он использован в оригинальной статье [Gar], так что еду как могу), которое тоже разделяет примитивные идеалы.

Лекция 7.2: Группа Гротендика блоков категории $\mathcal{O}$

Напомним, что категория $\mathcal{O}$ для $\mathfrak{g}$ распадается в прямую сумму категорий $\mathcal{O}^m$ по всем максимальным идеалам $m \subset Z(\mathfrak{g})$. Группа Гротендика всей категории $\mathcal{O}$ свободно порождена классами $[L(\lambda)]$ простых модулей старшего веса $L(\lambda), \lambda \in \mathfrak{h}^*$. Имеем

$$L(\lambda) \in \mathcal{O}^m \iff m = m_\lambda, \quad m_{\lambda_1} = m_{\lambda_2} \iff \exists w \in W : w(\lambda_1 + \rho) = \lambda_2 + \rho.$$

Фиксируем вес $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Из предыдущей формулы легко видеть, что

$$M(\mu) \in \mathcal{O}^{m_\lambda} \iff \exists w \in W : w(\lambda + \rho) = \mu + \rho.$$

Положим

$$\mathcal{O}^\lambda := \{M \in \mathcal{O}^{m_\lambda} \mid (\lambda - \mu \notin \mathbb{Z}\Pi) \implies M_\mu = 0\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{O}^{m_\lambda}$ есть прямая сумма подкатегорий $\mathcal{O}^{w(\lambda+\rho)-\rho}, w \in W$ (важно: многие из этих категорий могут совпасть, каждую совпадающую подкатегорию нужно брать в прямую сумму только 1 раз). Из сказанного выше ясно, что

а) описание всех категорий $\mathcal{O}^\lambda$ даёт полное описание категории $\mathcal{O}$,

б) $K(\mathcal{O}^\lambda) = \mathbb{Z}\{[L(\mu)] \mid \lambda - \mu \in \mathbb{Z}\Pi \& \exists w \in W : w(\lambda + \rho) = \mu + \rho\}$ (группа Гротендика категории $\mathcal{O}^\lambda$).

Мы докажем следующее утверждение:

Лемма 4. $K(\mathcal{O}^\lambda) = \mathbb{Z}\{[M(w(\lambda + \rho) - \rho)] \mid \lambda - \mu \in \mathbb{Z}\Pi \& \exists w \in W : w(\lambda + \rho) = \mu + \rho\}$

Доказательство. Нам потребуется несколько вспомогательных обозначений и определений. Для $M \in \mathcal{O}^\lambda$ положим

$$h(M) := \max_{\mu, M_\mu \neq 0} (\mu - \lambda, \rho), \quad H(M) := \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid M_\mu \neq 0 \& (\mu - \lambda, \rho) = h(M)\}.$$

Легко видеть, что если $\mu \in H(M)$, то $\mathfrak{n}M_\mu = 0$. Остюда следует, что

$$\forall \mu \in H(M) \exists w \in W : w(\lambda + \rho) = \mu + \rho.$$

В частности, множество $H(M)$ — конечно и множество возможных значений $h(M)$ на $\mathcal{O}^\lambda$ — также конечно. Рассмотрим отображение

$$\phi : \oplus_{\mu \in H(M)} M_\mu \otimes M(\mu) \to M.$$

Легко видеть что оба вовлечённых объекта принадлежат категории $\mathcal{O}^\lambda$. Рассмотрим точные последовательности:

$$0 \to \mathrm{Ker}\phi \to \oplus_{\mu \in H(M)} M_\mu \otimes M(\mu) \to \mathrm{Im}\phi \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Im}\phi \to M \to \mathrm{Coker}\phi \to 0.$$

В группе $K(\mathcal{O}^\lambda)$ имеем равенство:

$$[M] = +_{\mu \in H(M)} \dim M_\mu [M(\mu)] - [\mathrm{Ker}\phi] + [\mathrm{Coker}\phi].$$

Легко видеть, что

$$h(\mathrm{Ker}\phi) < h(M), \quad h(\mathrm{Coker}\phi) < h(M).$$

Далее по индукции легко доказать, что группа $K(\mathcal{O}^\lambda)$ порождена элементами

$$[M(w(\lambda + \rho) - \rho)] \mid \lambda - \mu \in \mathbb{Z}\Pi \& \exists w \in W : w(\lambda + \rho) = \mu + \rho.$$

□

Как итог, мы получили два содержательных набора образующих в группе $K(\mathcal{O}^\lambda)$. Матрица перехода от одного такого базиса к другому может быть описана с помощью полиномов Каждана-Люстига, определённых две лекции назад.

Теорема 2. Обозначим через $P_{x,w}(q)$ полиномы Каждана-Люстига для всех $x, w \in W$. Для всякого $w \in W$ имеют место следующие равенства:

$$[L(w\rho-\rho)] = \sum_{x<w}(-1)^{l(x)-l(w)}P_{x,w}(1)[M(x\rho-\rho)],$$

$$[M(w\rho-\rho)] = \sum_{x<w}P_{w_0x,w_0w}(1)[L(x\rho-\rho)].$$

Лекция 7.3: Структура блоков $\mathcal{O}^\lambda$

Число блоков $\mathcal{O}^\lambda$ внутри категории $\mathcal{O}$ всегда бесконечно, но, оказывается, что число их классов эквивалентности (а, пожалуй, и изоморфизма) всегда конечно; в частности, подавляющее большинство этих блоков изоморфно полупростой категории с одним простым объектом ($\cong$ категории векторных пространств).

Для того, чтобы определить все необходимые параметры нам потребуется больше обозначений. Для всякого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ положим

$\Delta_{\lambda+\mathbb{Z}\Pi} := \{\alpha \in \Delta \mid 2\frac{(\alpha,\lambda)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}\}$, $\Delta^+_{\lambda+\mathbb{Z}\Pi} := \Delta_{\lambda+\mathbb{Z}\Pi} \cap \Delta^+$,

$W_{\lambda+\mathbb{Z}\Pi} := W(\Delta_{\lambda+\mathbb{Z}\Pi}) = \{w \in W \mid w\lambda - \lambda \in \mathbb{Z}\Pi\}$,

$\hat{\lambda}$ — вес вида $w(\lambda+\rho)-\rho, w \in W_{\lambda+\mathbb{Z}\Pi}$, для которого значение $(\hat{\lambda}-\lambda, \rho)$ является наибольшим (такой элемент всегда единственнен — он же единственный доминантный вес в этой орбите),

$\hat{w}_\lambda$ — элемент группы $W_{\lambda+\mathbb{Z}\Pi}$, для которого $\hat{w}_\lambda(\hat{\lambda}+\rho) = \lambda+\rho$, и который имеет наибольшую длину среди таких векторов (такой элемент $\hat{w}_\lambda$ всегда единственнен),

$\Delta_{\hat{\lambda}+\rho} := \{\alpha \in \Delta \mid (\alpha, \hat{\lambda}+\rho) = 0\}$, $\Delta^+_{\hat{\lambda}} := \Delta_{\hat{\lambda}} \cap \Delta^+$,

$W_{\hat{\lambda}+\rho} := W(\Delta_{\hat{\lambda}+\rho}) = \{w \in W \mid w(\hat{\lambda}+\rho) = \hat{\lambda}+\rho\}$.

Легко видеть, что $\Delta^+_{\lambda+\mathbb{Z}\Pi}$ — это система положительных корней. Как следствие, она задаёт систему простых корней $\Pi_{\lambda+\mathbb{Z}\Pi}$. Легко видеть, что $\Delta^+_{\hat{\lambda}+\rho} \subset \Delta^+_{\lambda+\mathbb{Z}\Pi}$ — это подсистема положительных корней; она задаёт подсистему простых корней $\Pi_{\hat{\lambda}+\rho} \subset \Pi_{\lambda+\mathbb{Z}\Pi}$.

Теорема 3. Структура категории $\mathcal{O}^\lambda$ задаётся включением диаграмм Дынкина, соответствующего включению $\Pi_{\hat{\lambda}+\rho} \subset \Pi_{\lambda+\mathbb{Z}\Pi}$ (и не зависит от исходной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и её системы корней). В частности, число неизоморфных блоков в категории $\mathcal{O}$ всегда конечно.

Замечание 3. Включение $\Pi_{\lambda+\mathbb{Z}\Pi} \subset \Pi$ не всегда задаётся включением алгебр Ли: характерный пример $D_n \subset C_n (\mathfrak{so}(2n) \not\to \mathfrak{sp}(2n))$. Но всегда имеет включение алгебр Ли, соответствующих двойственным система корней ($D_n^\vee \cong D_n, C_n^\vee \cong B_n, \mathfrak{so}(2n) \to \mathfrak{so}(2n+1)$).

Используя уже введённые обозначения, несложно сформулировать критерий равенства двух идеалов примитивных идеалов вида $I(\lambda)$.

Теорема 4. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{h}^*$ — это два каких-то веса.

а) Если $I(\lambda_1) = I(\lambda_2)$, то $\exists w \in W : w(\lambda_1+\rho) = \lambda_2+\rho$.

б) Если $\exists w \in W : w(\lambda_1+\rho) = \lambda_2+\rho$, то существует и единственный $w \in W$, для которого

$$w(\hat{\lambda}_1+\rho) = \hat{\lambda}_2+\rho, \quad w\Delta^+_{\hat{\lambda}_1+\rho} = \Delta^+_{\hat{\lambda}_1+\rho}.$$

в) Если w выбран как в б), то $I(\lambda_1) = I(\lambda_2)$ тогда и только тогда, когда $\hat{w}_{\lambda_1}$ и $w^{-1}\hat{w}_{\lambda_2}w$ лежат в одной левой клетке группы $W_{\lambda_1+\mathbb{Z}\Pi}$.

1.1. **Соответствие Спрингера и ассоциированные многообразия.** Для всякого модуля M из категории $\mathcal{O}$ можно определить функцию $\mu \to \dim M_\mu$. Эта функция равна 0 на большинстве весов и равна тем или иным многочленам на тех или иных сдвинутых подрешётках (этих многочленов конечное количество и их можно вычислить с помощью значений полиномов Каждана-Люстига). Каждый такой многочлен имеет какую-то степень как элемент $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$. Выберем среди этих многочленов все многочлены максимальной степени d и обозначим через $f_1, ..., f_s$ их компоненты старшей степени. По определеинию, имее что $f_1, ..., f_s \in \mathrm{S}^d(\mathfrak{h})$. Так как W действует на $\mathfrak{h}$, то имеется индуцированное действие W на $\mathrm{S}^d(\mathfrak{h})$. Обозначим через $\mathrm{Spr}(M)$ наименьший W-модуль, порождённый $f_1, ..., f_s$. Он часто будет неприводим (???).

С другой стороны, можно провернуть ту же самую процедуру на множестве функций на орбитальном многообразии L, связанном с произвольной коприсоединённой орбитой $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}$. Результат не будет зависеть от выбора орбитального многообразия L внутри $\mathcal{O}$; мы обозначим его $\mathrm{Spr}(\mathcal{O})$.

Отображение $\mathcal{O} \to \mathrm{Spr}(\mathcal{O})$ из множества нильпотентных орбит полупростой алгебры Ли в множество представлений её группы Вейля называется соответствием Спрингера. Известно, что оно инъективно. Имеется комбинаторное описание этого отображения для классических алгебр Ли и явно посчитанное описание для исключительных алгебр Ли.

Лемма 5 ([Jo]). Ассоциированное многообразие $\mathcal{O}$ идеала $I(\lambda), \lambda \in \mathfrak{h}^*$, однозначно определяется условием

$$\mathrm{Spr}(L(\lambda)) = \mathrm{Spr}(\mathcal{O}).$$

Список литературы

[Dix] J. Dixmier, *Algebres Enveloppantes*, Gauthier-Villars, 1974. (доступен перевод на русский и на английский)

[Hu] J. Humfreys, *Representations of semisimple Lie algebras in BGG category $\mathcal{O}$*, Graduate Studies in Math. **94**, AMS.

[BeG] J. Bernstein, S. Gelfand, Tensor products of finite and infinite-dimensional representations of semisimple Lie algebras, Comp. Math. **41**(1980), 245–285.

[BJ] W. Borho, J.-C. Jantzen, *Über primitive Ideale in der Einhüllenden einer halbeinfachen Lie-Algebra*, Invent. Math. **39 no. 1** (1977), 1–53.

[Vog] D. Vogan, *A generalized τ-invariant for the primitive spectrum of a semisimple Lie algebra*, Math. Ann. **242 no. 3** (1979), 209–224.

[Gar] D. Garfinkle, *On the classification of primitive ideals for complex classical Lie algebras I*, (первая часть; роман в трёх частях) Comp. Math., 75 (1990), 135–169.

[Jo] A. Joseph, *A characteristic variety for the primitive spectrum of a semisimple Lie algebra*, Non-commutative harmonic analysis (Actes Colloq., Marseille-Luminy, 1976), Lecture Notes in Math., Vol. 587 , Springer, Berlin, 1977, 102–118.