Лекция 6: Проективные функторы и функторы трансляции

В этой лекции мы обсудим проективные функторы (введённые С. Гельфандом и И. Бернштейном [BeG]) и функторы трансляции (изобретение Й. Янсена [BJ]).

Фиксируем набор данных $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$; это задаёт также $\Delta, \Delta^+, \Delta^-, \Pi, (\cdot,\cdot), \rho, P^+$. Обозначим через $\mathfrak{g} - \mathrm{mod}$ категорию $\mathfrak{g}$-модулей. Всякий вектор $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ определяет максимальный идеал m_λ в $Z(\mathfrak{g})$ (ядро отображения $Z(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(M(\lambda))$). Для всякого максимального идеала p в $Z(\mathfrak{g})$ положим

$$\mathfrak{g} - \mathrm{mod}^p := \{M \in \mathfrak{g} - \mathrm{mod} \mid \forall m \in M \exists k \geq 0 : p^k m = 0\}.$$

В этой главе $V_1 \otimes V_2$ обозначает тензорное произведение векторрных пространств над над основным полем; если $V_1, V_2 \in \mathfrak{g} - \mathrm{mod}$, то $V_1 \otimes V_2$ наделяется структурой $\mathfrak{g}$-модуля по правилу Лейбница.

1.1. **Определение и базовые свойства.** Пусть $V = V(\nu), \nu \in P^+$, это некоторый конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль. Функтор

$$F_V : \mathfrak{g} - \mathrm{mod} \to \mathfrak{g} - \mathrm{mod}, \quad M \to M \otimes V,$$

является строго точным (переводит точные последовательности в точные последовательности и ненулевые объекты в ненулевые объекты) и неразложимым (не представим в виде прямой суммы двух нетривиальных функторов).

Фиксируем набор различных максимальных идеалов $m_1, ..., m_s$ в $Z(\mathfrak{g})$. Ограничение функтора F_V на категории $\mathfrak{g} - \mathrm{mod}^{m_i}$ по прежнему является строго точным функтором, но уже может быть разложимым. *Проективным функтором* называется прямое слагаемое ограничения функтора $F_{V(\nu))}$ на прямую сумму категорий $\oplus_i \mathfrak{g} - \mathrm{mod}^{m_i}$. Проективные функторы имеют следующие базовые свойства, см. [BeG, 3.2].

- прямое слагамое проективного функтора является проективным функтором,
- прямая сумма конечного набор проективных функторов является проективным функтором,
- проективные функторы переводят объекты категории $\mathcal{O}$ в объекты категории $\mathcal{O}$,
- образ проективного функтора F лежит в прямой сумме нескольких $\mathfrak{g} - \mathrm{mod}^{m'_i}$ для конечного набора попарно раличных максимальных идеалов m'_i,
- композиция проективных функторов является проективным функтором.

Таким образом, множество проективных функторов образует полукольцо относительно операций "прямая сумма" и "композиция".

1.2. **Действие на группе Гротендика.** Каждый проективный функтор (как и всякий точный функтор) задаёт $\mathbb{Z}$-линейный оператор на группе Гротендика (она же K-группа) прямой суммы категорий $\oplus_{m \subset Z(\mathfrak{g})} \mathfrak{g} - \mathrm{mod}^m$, и, в частности, на K-группе категории $\mathcal{O}$. Мы будем обозначать соответствующие операторы $[F]$ и $[F]^{\mathcal{O}}$. Очевидно, что

$$[F_1 \oplus F_2]^{\mathcal{O}} = [F_1]^{\mathcal{O}} + [F_2]^{\mathcal{O}}, [F_1 \circ F_2]^{\mathcal{O}} = [F_1]^{\mathcal{O}}[F_2]^{\mathcal{O}}.$$

Группа Гротендика $K(\mathcal{O})$ категории $\mathcal{O}$ свободно порождена образами простых объектов $L(\lambda), \lambda \in \mathfrak{h}^*$. Оказывается, что при работе с операторами $[F]^{\mathcal{O}}$ удобно использовать другой базис $K(\mathcal{O})$: базис, заданный образами $[M(\lambda)]$ модулей Верма $M(\lambda)$; положим $\delta_\lambda := [M(\lambda)]$. На этом базисе мы введём действие группы Вейля по следующему правилу:

$$w \cdot \delta_\lambda = \delta_{w(\lambda+\rho)-\rho}, \quad w \in W, \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Лемма 1 ([BeG, 3.4])**.** Фиксируем $\nu \in P^+$. Для всякого $\mu \in \mathfrak{h}^*$ обозначим через $d_{\mu,\nu}$ размерность $\mathfrak{h}$-весового пространства веса μ в $V(\nu)$. Тогда

$$[F_{V(\nu)}]^{\mathcal{O}} \delta_\lambda = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} d_{\mu,\nu} \delta_{\lambda+\mu}.$$

Теорема 1 ([BeG, 3.4, Теорема])**.** Пусть F_1, F_2 — это два проективных функтора. Тогда

- действие $[F_1]^{\mathcal{O}}$ коммутирует с действием W на $K(\mathcal{O})$,
- если $[F_1]^{\mathcal{O}} = [F_2]^{\mathcal{O}}$, то $F_1 \cong F_2$.

Таким образом, всякий проективный функтор F однозначно задаётся оператором $[F]^{\mathcal{O}}$.

1.3. **Описание проективных функторов.** Мы начнём с описания неразложимых проективных функторов (т.е. проективных функторов, не имеющих нетривиальных прямых слагаемых); любой проективный функтор разлагается в прямую сумму неразложимых проективных функторов и набор слагаемых определён однозначно [BeG, 3.3, Теорема].

Для этого нам потребуются новые обозначения. Положим

$$\Theta = \{(\lambda, \mu) \in \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \mid \lambda - \mu \in \mathbb{Z}P^+\}, \text{ где } \mathbb{Z}P^+ = P^+ - P^+.$$

Положим

$$(\lambda_1, \mu_1) \approx (\lambda_2, \mu_2) \iff \exists w \in W : w(\lambda_1 + \rho) = \lambda + \rho, w(\mu_1 + \rho) = \mu_2 + \rho.$$

Напомним, что вес $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ называется *доминантным*, если $2\frac{(\alpha,\lambda+\rho)}{(\alpha,\alpha)} \notin \mathbb{Z}_{<0} \forall \alpha \in \Pi$. Пара $(\lambda, \mu) \in \Theta$ называется *доминатной* если λ доминантен и $\mu + \rho - w(\mu + \rho) \in \mathbb{P}^+ \forall w \in W_{\lambda+\rho}$, где $W_{\lambda+\rho}$ есть стабилизатор $\lambda + \rho$ в W. Легко проверить, что в классе $\approx$-эквивалентности всегда есть хотя бы одна доминантная пара.

Теорема 2 ([BeG, 3.3, Теорема])**.** Есть отображение $(\lambda, \mu) \to F_{\lambda,\mu}$ из Θ в множество неразложимых проективных функторов со следующими свойствами

- отображение $(\lambda, \mu) \to F_{\lambda,\mu}$ сюръективно на Θ,
- $F_{\lambda,\mu}$ отображает $\mathfrak{g} - \mathrm{mod}^{m_\lambda}$ в $\mathfrak{g} - \mathrm{mod}^{m_\mu}$, а все остальные $\mathfrak{g} - \mathrm{mod}^m$ отображает в ноль,
- если $(\lambda_1, \mu_1) \approx (\lambda_2, \mu_2)$, то $F_{\lambda_1,\mu_1} \cong F_{\lambda_2,\mu_2}$,
- если пара $(\lambda, \mu) \in \Theta$ доминантна, то $M(\lambda)$ проективно и $F_{\lambda,\mu} M(\lambda) = P(\mu)$

($P(\mu) :=$ единственный проективный объект категории $\mathcal{O}$ с простым фактором $L(\lambda)$),

- функторы $F_{\lambda,\mu}$ и $F_{\mu,\lambda}$ являются присоединёнными слева и справа друг к другу для любой пары $(\lambda, \mu) \in \Theta$.

Замечание 1. Разложение $[P(\mu)]$ в сумму классов модулей Верма задаётся в группе Гротендика задаётся полиномами Каждана-Люстига (определены в предыдущей лекции). На лекции не было сказано этого явно и это часть материала следующей лекции.

Замечание 2. Тот факт, что функторы трансляции коммутируют с действием W на $K(\mathcal{O})$ позволяет полностью вычислить $[F_{\lambda,\mu}]^{\mathcal{O}}$ с поправкой на Замечание 1.

Следствие 1. Пусть $(\lambda, \mu) \in \Theta$ таковы что

- λ и μ доминантны,
- $W_{\lambda+\rho} = W_{\mu+\rho}$.

Тогда функторы $F_{\lambda,\mu}$ и $F_{\mu,\lambda}$ задают эквивалентность категорий $\mathfrak{g} - \mathrm{mod}^{m_\lambda}$ и $\mathfrak{g} - \mathrm{mod}^{m_\mu}$.

Следствие 2. Пусть λ и μ доминантны и $\lambda - \mu \in \mathbb{Z}P^+$, $W_{\lambda+\rho} \subset W_{\mu+\rho}$. Тогда

$$F_{\lambda,\mu}(M(w(\lambda + \rho) - \rho)) \cong M(w(\mu + \rho) - \rho), F_{\lambda,\mu}(L(w(\lambda + \rho) - \rho)) \cong L(w(\mu + \rho) - \rho)$$

(см. также [Hu, 7.6, 7.7]).

Определение 1. Пусть $(\lambda, \mu) \in \Theta$ таковы что

- λ и μ доминантны,
- $W_{\lambda+\rho} \subset W_{\mu+\rho}$ или $W_{\mu+\rho} \subset W_{\lambda+\rho}$.

Тогда функторы $F_{\lambda,\mu}$ и $F_{\mu,\lambda}$ называются *функторами трансляции*.

Замечание 3. Функторы трансляции были введены Янсеном раньше, чем были введены проективные функторы, и, по сути, их определение даётся (почти) теми же формулами, а свойства исследуются (почти) теми же методами что и для проективных функторов. Реально, Гельфанд и Бернштейн описали часть картинки, которая выпала из описания Янсена без особо уважительных причин. В частности, композиция функторов трансляции не всегда является функтором трансляции и любой неразложимый проективный функтор есть композиция двух функторов трансляции.

Замечание 4. Польза от функторов трансляции в том, что они разбивают все блоки $\mathfrak{g} - \mathrm{mod}^m$ на достаточно крупные классы и (с категорной точки зрения) достаточно описать один блок в классе чтобы описать все. По факту, у категории $\mathcal{O}$ есть лишь конечное число неэквивалентных блоков (но доказывается это уже другими методами).

1.4. **Категорное действие группы Вейля на главном блоке категории $\mathcal{O}$.** Оказывается, что по модулю действия функторами трансляции, действие проективных функторов сводится к правому действию $\mathbb{Z}[W]$ на себе умножением. Это мы сейчас и обсудим.

Рассмотрим главный блок $\mathcal{O}^{m_0}$ категории $\mathcal{O}$, т.е. $\mathcal{O} \cap \mathfrak{g} - \mathrm{mod}^{m_0}$. В нём содержится $|W|$ простых объектов $(L(w\rho - \rho), w \in W)$, $|W|$ модулей Верма $(M(w\rho - \rho), w \in W)$ и $|W|$ проективных объектов $(P(w\rho - \rho), w \in W)$. Значит, $K(\mathcal{O}^{m_0})$ свободно порождена элементами $\delta_{w\rho-\rho}$. Следовательно, $K(\mathcal{O}^{m_0})$ может быть отождествлена с групповой алгеброй $\mathbb{Z}[W]$ по крайней мере как абелева группа.

Далее, $\mathfrak{g} - \mathrm{mod}^{m_0}$ сохраняется функторами $F_{0,w\rho-\rho}$. И, следовательно $K(\mathcal{O}^{m_0}) \cong \mathbb{Z}[W]$ является модулем над алгеброй с $|W|$-базисными элементами $([F_{0,w\rho-\rho}], w \in W)$. Осталось проверить, что эта алгебра изоморфна $\mathbb{Z}[W]$.

Лемма 2. а) Для всякого $\alpha \in \Pi$ имеем что $[F_{0,s_\alpha\rho-\rho}]\delta_{w\rho-\rho} = \delta_{ws_\alpha\rho-\rho} + \delta_{w\rho-\rho}$. Таким образом, действие $[F_{0,s_\alpha\rho-\rho}]$ на $K(\mathcal{O}^{m_0})$ эквивалентно умножению $\mathbb{Z}[W]$ на $s_\alpha + 1$ справа.
б) Подалгебра в $\mathrm{End}(\mathbb{Z}[W])$, порождённая $[F_{0,w\rho-\rho}], w \in W$, изоморфна $\mathbb{Z}[W]$.

Доказательство. Фиксируем $\alpha \in \Pi$. Функтор $F_{0,s_\alpha\rho-\rho}$ переводит M_0 в P_α. Известно, что

$$[P_\alpha] = [M_0] + [M_{s_\alpha\rho-\rho}].$$

Отсюда немедленно следует а).

Группа Вейля порождается, простыми отражениями, и, следовательно, совокупность элементов вида $s_\alpha + 1, \alpha \in \Pi$, порождает $\mathbb{Z}[W]$. Для того, чтобы проверить б), достаточно проверить что $[F_{0,w\rho-\rho}]^{\mathcal{O}} \in \mathbb{Z}[W] \forall w \in W$. Напомним, что все эти функторы коммутирует с действием W на $K(\mathcal{O})$, и, следовательно, $[F_{0,w\rho-\rho}]$ задаёт элемент в $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}[W]}\mathbb{Z}[W]$. Последняя алгебра совпадает с $\mathbb{Z}[W]$. Что и требовалось доказать. □

1.5. **Функторы трансляции и аннуляторы модулей.** Фиксируем конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль $V = V(\nu), \nu \in P^+$.

Лемма 3. Пусть M_1, M_2 — это два $\mathfrak{g}$-модуля с одинаковыми аннуляторами. Тогда аннуляторы модулей $M_1 \otimes V$ и $M_2 \otimes V$ также совпадают.

Доказательство. По определению, аннулятор $\mathfrak{g}$-модуля M это ядро отображения $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$. Имеем цепочку отображений

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to^1 \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to^2 \mathrm{U}(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}M \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}V \to^3 \mathrm{End}(M) \otimes \mathrm{End}(V) \to^4 \mathrm{End}(M \otimes V),$$

где (1) — это отображение индуцированное диагональным вложением $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ $(x \to (x, x))$, (2) — фактор левой и правой компоненты тензорного произведения по соответствующим идеалам, (3) — вложения, заданные представлениями $\mathfrak{g}$ в M и V. Композиция (1), (2), (3), (4) задаёт искомое отображение $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(M \otimes V)$. Так как (3) и (4) не имеют ядра, то аннулятор $M \otimes V$ совпадает с ядром композиции отображений (1) и (2). Это отображение зависит только от аннуляторов M и V. Что и требовалось доказать. □

Оказывается, что похожее утверждение верно и для произвольного проективного функтора.

Предложение 1 ([BJ, 2.4]). Пусть M_1, M_2 — это два $\mathfrak{g}$-модуля с одинаковыми аннуляторами, а F — это некоторый проективный функтор. Тогда аннуляторы модулей FM_1 и FM_2 также совпадают. В частности, если $FM_1 \neq 0$, то и $FM_2 \neq 0$.

Следствие 3. Пусть λ, и μ доминантны и $\lambda - \mu \in \mathbb{Z}P^+$, $W_{\lambda+\rho} = W_{\mu+\rho}$. Тогда

$$I(w_1(\lambda + \rho) - \rho)) = I(w_2(\lambda + \rho) - \rho) \iff I(w_1(\mu + \rho) - \rho)) = I(w_2(\mu + \rho) - \rho) \forall w_1, w_2 \in W.$$

В частности, слой отображения ϕ_λ из предыдущей лекции не зависит от выбора $\lambda \in P^+$.

Доказательство. Выводится из предшествующего результата и Следствия 2. □

Таким образом переходит или не переходит модуль под действием тех или иных проективных функторов не в 0 определяется только его идеалом, т.е. является инвариантом идеала. Множество проективных функторов, переводящих модули, аннулируемые данным идеалом не в ноль, близко к τ-инварианту этого идеала. Для всякого $\alpha \in \Pi$ обозначим через $\omega_\alpha \in \Pi^+$ соответствующий фундаментальный вес, что значит что

$$2\frac{(\omega_\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 1, \quad 2\frac{(\omega_\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = 0 \forall \beta \neq \alpha \in \Pi.$$

Лемма 4. Имеем $F_{0,-\omega_\alpha}L(w\rho-\rho)=0 \iff w\alpha\in\Delta^+$. Второе условие по определению значит, что $\alpha\in\tau(w)$.

Далее, используя функторы трансляции можно свести описание примитивных идеалов вида $I(\lambda), \lambda \in \mathbb{Z}P^+$ к описанию примитивных идеалов вида $I(w\rho-\rho), w\in W$, используя следующую лемму.

Лемма 5. Выберем доминантный элемент $\lambda\in\mathbb{Z}P^+$.
а) Функтор $F_{0,\lambda}$ индуцирует биекцию

$$\{\text{идеалы } I=I(w\rho-\rho), w\in W \mid F_{0,\lambda}L(w\rho-\rho)\neq 0\}\leftrightarrow\{\text{идеалы } I=I(w(\lambda+\rho)-\rho), w\in W\}$$

[BJ, 2.12, Теорема],
б) $F_{0,\lambda}L(w\rho-\rho)=0 \iff ((\lambda+\rho,\alpha)\neq 0 \forall\alpha\in\tau(w)$ [BJ, 2.14, Теорема]

Список литературы

[Dix] J. Dixmier, *Algebres Enveloppantes*, Gauthier-Villars, 1974. (доступен перевод на русский и на английский)
[Hu] J. Humfreys, *Representations of semisimple Lie algebras in BGG category $\mathcal{O}$*, Graduate Studies in Math. **94**, AMS.

[BeG] J. Bernstein, S. Gelfand, Tensor products of finite and infinite-dimensional representations of semisimple Lie algebras, Comp. Math. **41**(1980), 245–285.
[BJ] W. Borho, J.-C. Jantzen, *Über primitive Ideale in der Einhüllenden einer halbeinfachen Lie-Algebra*, Invent. Math. **39 no. 1** (1977), 1–53.