Лекция 3, Часть 1: Ассоциированное многообразие $\mathfrak{g}$-модуля

Материал этой секции "все знают" и поэтому его никто никогда не пишет. Впрочем, что-то можно найти в [KL].

Пусть $\mathfrak{g}$ — некоторая алгебра Ли, а $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ — это её универсальная обёртывающая алгебра. Выберем какой-нибудь базис $g_1, ..., g_n$ в $\mathfrak{g}$. Напомним, что $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ имеет базис $\{g_1^{d_1}...g_n^{d_n}\}_{d_i \geq 0}$. Положим

$$\mathrm{U}^{\leq d} := \mathrm{span}\{g_1^{d_1}...g_n^{d_n}\}_{d_1+...+d_n \leq d}.$$

Несложно убедиться, что

- $U^{\leq 0} = \mathbb{C}\mathbf{1}$,
- $U^{\leq 1} = \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{g_1, ..., g_n\}$,
- $U^{\leq d_1} \subset U^{\leq d_2}$ если $d_1 \leq d_2$,
- $\cup_{d \geq 0} U^{\leq d} = \mathrm{U}(\mathfrak{g})$,
- $U^{\leq d}$ не зависят от выбора базиса в $\mathfrak{g}$,
- $U^{\leq d_1} U^{\leq d_2} = U^{\leq d_1 + d_2}$.

Последнее свойство позволяет ввести ассоциированную градуированную алгебру $\mathrm{grU}(\mathfrak{g})$. Легко видеть, что эта алгебра свободна порождена образами элементов $g_1, ..., g_n$, и, следовательно, изоморфна $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$.

1.1. **Фильтрация $\mathfrak{g}$-модуля.** Пусть M — это некоторый конечнопорождённый $\mathfrak{g}$-модуль. По определению это значит, что существует конечномерное пространство $M_0 \subset M$, такое что $M = \mathrm{U}(\mathfrak{g})M_0$. Положим $M_i := U^{\leq i} M_0$. Очевидно, что M_i — это исчерпывающая фильтрация модуля M и что $U^{\leq j} M_i = M_{i+j}$. Отсюда следует, что присоединённый градуированный модуль

$$\mathrm{gr}_{M_0} M := \oplus_{i \geq 0} M_i / M_{i-1}$$

- является $\mathrm{grU}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{S}(\mathfrak{g})$-модулем.
- порождён образом подпространства M_0.

Далее, всякий конечно порождённый $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$-модуль $\tilde{M}$ имеет носитель, определяемый формулой

$$\mathrm{Supp}\tilde{M} := \{\chi \in \mathfrak{g}^* \mid f(\chi) = 0 \forall f \in \mathrm{Ann}_{\mathrm{S}(\mathfrak{g})} \tilde{M}\}$$

(для того, чтобы сделать определение более явным масимальный спектр $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ сразу подменен $\mathfrak{g}^*$; это не вполне честно если $\mathfrak{g}$ несчётномерно над $\mathbb{C}$, а почему — поговорим в следующей лекции). Положим

$$\mathrm{Var}(M) := \mathrm{Supp}(\mathrm{gr}_{M_0} M).$$

Модуль $\mathrm{gr}_{M_0} M$ существенно зависит от выбора порождающего пространства, но $\mathrm{Var} M$ — уже не зависит, как показывает следующая (фольклёрная) лемма.

Лемма 1. Подмногообразие $\mathrm{Var}(M)$ не зависит от выбора пространства M_0.

Доказательство. Пусть M_0 и M_0' — это два конечномерных порождающих пространства $\mathfrak{g}$-модуля M, задающие фильтрации $\{M_i\}_{i \geq 0}$ и $\{M_i'\}_{i \geq 0}$ соответственно. Достаточно доказать, что

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_{\mathrm{S}(\mathfrak{g})} \mathrm{gr}_{M_0} M} = \sqrt{\mathrm{Ann}_{\mathrm{S}(\mathfrak{g})} \mathrm{gr}_{M_0'} M},$$

где $\sqrt{I} := \{f \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \mid \exists k \geq 0 : f^k \in I\}$ для всякого идеала I в $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. Мы докажем, что

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_{\mathrm{S}(\mathfrak{g})} \mathrm{gr}_{M_0} M} \subset \sqrt{\mathrm{Ann}_{\mathrm{S}(\mathfrak{g})} \mathrm{gr}_{M_0'} M}; \tag{1}$$

с помощью полностью аналогичного рассуждения можно будет доказать обратное включение идеалов, а, следовательно, и их равенство. Очевидно, что (1) следует из

$$\exists r \geq 1 (\mathrm{Ann}_{\mathrm{S}(\mathfrak{g})} \mathrm{gr}_{M_0} M)^r \subset (\mathrm{Ann}_{\mathrm{S}(\mathfrak{g})} \mathrm{gr}_{M_0'} M). \tag{2}$$

Сейчас мы докажем (2). Модуль $\mathrm{gr}_{M_0} M$ градуирован, и, следовательно, его аннулятор является градуированным идеалом в $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. То же самое верно для $\mathrm{gr}_{M_0'} M$. Фиксируем элемент $u \in U^{\leq d} \backslash U^{\leq d-1}$ и обозначим через $\bar{u} \in U^{\leq d} / U^{\leq d-1}$ его образ в $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. Имеем

$$\bar{u} \in \mathrm{Ann}_{\mathrm{S}(\mathfrak{g})} \mathrm{gr}_{M_0} M \iff u M_i \subset M_{i+d-1} \forall i.$$

Из того, что M_0, M_0' порождают $\mathfrak{g}$-модуль M следует, что

$$M_0' \subset M_k, M_0 \subset M_l$$

для каких-то $k, l \geq 0$. Фиксируем такие числа k, l. Тогда

$$u^s M'_j \subset u^s M_{k+j} \subset M_{k+j+s(d-1)} \subset M'_{l+k+j+s(d-1)}.$$

Если $s \geq l+k+1$, то $l+k+j+s(d-1) \leq j+sd-1$ — а, следовательно, $M'_{l+k+j+s(d-1)} \subset M'_{j+sd-1}$. Осталось заметить, что $u^s \in U^{\leq sd} \backslash U^{\leq sd-1}$ и $\bar{u^s} = \bar{u}^s$. Отсюда следует, что

$$\bar{u}^s \in (\mathrm{Ann}_{\mathrm{S}(\mathfrak{g})} \mathrm{gr}_{M'_0} M) \forall s \geq l+k+1.$$

Это доказывает (2) для $r = l+k+1$. □

1.2. **Ассоциированные многообразия и категория $\mathcal{O}$.** До конца секции мы будем считать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. В связи с этим мы будем отождествлять $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{g}^*$ с помощью формы Картана-Килинга ($x \to (x, \cdot)$).

Лемма 2. Если M — это объект категории $\mathcal{O}$ для $\mathfrak{g}$, то $\mathrm{Var}(M) \subset \mathfrak{n}$.

Доказательство. В предыдущей лекции было показано, что M обладает $\mathfrak{b}$-стабильным порождающим пространством M_0. Следовательно, $\mathfrak{b}\bar{M}_0 = 0$, где $\bar{M}_0$ — это образ M_0 в $\mathrm{gr}_{M_0} M$. Так как $\bar{M}_0$ порождает $\mathrm{gr}_{M_0} M$, мы имеем

$$\mathfrak{b} \subset \mathrm{Ann}_{\mathrm{S}(\mathfrak{g})} \mathrm{gr}_{M_0} M.$$

Отсюда следует, что

$$(\chi, \mathfrak{b}) = 0 \forall \chi \in \mathrm{Var} M. \tag{3}$$

Множество $\chi \in \mathfrak{g}$, для которых (3) совпадает с $\mathfrak{n}$. □

Лемма 3. Пусть M — это конечнопорождённый $\mathfrak{g}$-модуль, и пусть существует идеал $m \subset Z(\mathfrak{g})$, для которого $mM = 0$ и $\dim Z(\mathfrak{g})/m < \infty$. Тогда $\bar{f}|_{\mathrm{Var(M)}} = 0$ для всех $f \in Z(\mathfrak{g})$.

Доказательство. Пусть M_0 — это некоторое порождающим пространством $\mathfrak{g}$-модуля M. Тогда $\tilde{M}_0 := Z(\mathfrak{g}) M_0$ есть образ

$$Z(\mathfrak{g})/m \otimes_{\mathbb{C}} M_0.$$

Следовательно, $\tilde{M}_0$ конечномерно и порождает M. Очевидно, что $f\tilde{M}_0 \subset \tilde{M}_0$. Откуда $f|_{\mathrm{Var} M} = 0$. □

Лекция 3, Часть 2: Орбитальные многообразия Джозефа

Фиксируем тройку $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$; это задаст нам набор данных $(G, B, T, (\cdot,\cdot), \Delta, \Delta^+, \Delta^-, \Pi, P^+)$. Легко проверить, что все $x \in \mathfrak{n}$ являются нильпотентными матрицами (напомним, что для $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(n)$ можно отождествить $\mathfrak{n}$ со строго верхнетреугольными матрицами). Мы обозначим множество всех нильпотентных матриц в $\mathfrak{g}$ через $N(\mathfrak{g})$. Число G-орбит в $N(\mathfrak{g})$ всегда конечно (для $\mathfrak{sl}(n)$ нильпотентные орбиты задаются Жордановыми нормальными формами, т.е. разбиениями числа n). Более подробно нильпотентные орбиты обсуждаются в [CM], см. так же [Ja].

Определение 1. Для всякой G-орбиты $\mathcal{O}$ неприводимые компоненты пересечения $\mathcal{O} \cap \mathfrak{n}$ называются *орбитальными многообразиями Джозефа.*

Оказывается, что для всякого объекта M категории $\mathcal{O}$ верно, что $\mathrm{Var}(M)$ есть объединение нескольких орбитальных многообразий Джозефа, см. леммы 2, 3. Категория $\mathcal{O}$ и орбитальные многообразия описываются близкой комбинаторикой и как общее правило

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{комбинаторика} \\ \text{орбитальных} \\ \text{многообразий} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \text{комбинаторики} \\ \text{категории } \mathcal{O} \end{array} \right\}.$$

1.3. **Орбитальные многообразия Джозефа для $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(n)$.** Подалгебра $\mathfrak{n}$ для $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(n)$ может быть отождествлена с верхнетреугольными матрицами. Обозначим через V_i пространство натянутое на первые i векторов соответствующего базиса $\mathbb{C}^n$. Легко видеть, что $\mathfrak{n}$ сохраняет все пространства V_i.

Фиксируем $x \in \mathfrak{n}$. Для любого i, действие x на пространстве V_i нильпотентно и, следовательно, задаётся разбиением числа i; разбиение $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_s \geq 0$ числа i может также задано табличкой, длины столбцов в которой равны $\lambda_1, ..., \lambda_s$. Эти таблички для всех $i, 1 \leq i \leq n$ вкладываются друг в друга и в i-ой табличке ровно i ячеек. Таким образом, на каждом шаге переход от $(i-1)$-ой таблицы к i-ой осуществляется добавлением одной ячейки. Поставим в эту ячейку число i. В результате, мы сопоставим x табличку $Y(x)$ с n-ячейками, в каждой из которых стоит число от 1 до n. Легко убедиться, что

- в левом нижнем углу $Y(x)$ стоит число 1,
- числа в $Y(x)$ возрастают вдоль строк,
- числа в $Y(x)$ убывают вдоль столбцов.

Таблицы, Y удовлетворяющие трём идущим выше условиям, называются *стандартными таблицами Юнга.*

Несложно убедиться, что в любом орбитальном многообразии Джозефа есть открытое множество элементов x, для которых $Y(x)$ одинаково; это определяет отображение

$$\left\{\begin{array}{c}\text{орбитальные}\\ \text{многообразия}\\ \text{Джозефа}\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{c}\text{стандартные}\\ \text{таблицы Юнга}\end{array}\right\}.$$

Оказывается, что это отображение является биекцией (хорошее упражнение по линейной алгебре — оно войдёт в экзамен курса).

Замечание 1. Разбиения числа n также могут быть отождествлены с представлениями S_n, а S_n — это группа Вейля $\mathfrak{sl}(n)$. Стандартные таблицы Юнга данной формы могут быть отождествлены с базисом в соответствующего представления S_n. Как итог — имеется биекция между нильпотентными орбитами в $\mathfrak{sl}(n)$ и неприводимыми представлениями S_n, а орбитальные многообразия, связанные с этой орбитой, отождествляются с элементами базиса в этом представлении S_n. Похожая картина имеет место для любой полупростой алгебры Ли.

1.4. **Орбитальные многообразия Джозефа: общий случай.** Для предоставления честных доказательств этой секции (а не просто результатов) нужны какие-то знания по симплектической геометрии, см., скажем, [NG]. Там же можно найти и честное изложение идущих ниже фактов.

Из определения борелевской подалгебры следует, что любой нильпотентный элемент $x \in N(\mathfrak{g})$ сопряжён каком-то элементу из $\mathfrak{n}$ (для $\mathfrak{sl}(n)$ это значит, что любая матрица сопряжена верхнетреугольной матрице). Отсюда следует, что $N(\mathfrak{g}) = G \cdot \mathfrak{n}$ (разнесение $\mathfrak{n}$ действием G). Так как $\mathfrak{n}$ сохраняется действием B, определено однородное расслоение

$$G *_B \mathfrak{n} = G \times \mathfrak{n}/B \quad \text{над } G/B.$$

Обозначим естественное отображение $G*_B\mathfrak{n} \to G\cdot\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ через φ_G. Так как $\mathfrak{n} \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^*$ как B-модуль, мы имеем что $G*_B\mathfrak{n} \cong T^*(G/B)$ (кокасательное расслоение к G/B). Более того, ϕ_G является отображением моментов для действия G на $T^*(G/B)$.

Полный прообраз $\phi_G^{-1}(\mathfrak{n})$ является подмногообразием в $T^*(G/B)$ с несколькими неприводимыми компонентами. Образ каждой такой неприводимой компоненты совпадает с орбитальным многообразием Джозефа. Таким образом, определено отображение

$$\left\{\begin{array}{c}\text{неприводимые}\\ \text{компоненты } \phi_G^{-1}(\mathfrak{n})\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{c}\text{орбитальные}\\ \text{многообразия}\\ \text{Джозефа}\end{array}\right\}.$$

Оно сюръективно.

Отображение $\mathfrak{b} \to \mathfrak{g}$ определяет отображение $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{b}^*$. Обозначим через ϕ_B композицию этого отображения с ϕ_G. Ядро этого отображения совпадает с $\mathfrak{n}$. Следовательно,

$$\phi_G^{-1}(\mathfrak{n}) = \phi_B^{-1}(0).$$

Тогда ϕ_B является отображением моментов для действия B на $T^*(G/B)$. Многообразие ϕ_B^{-1} совпадает с объединением кокасательных расслоений ко всем B-орбитам на G/B (в этот момент могут оказаться полезны какие-то знания о многообразиях флагов, если кому их не хватит, то рекомендую почитать [Br]). Известно, что множество B-орбит на G/B конечно и, более того, параметризуется элементами группы Вейля W. Следовательно, неприводимые компоненты $\phi_B^{-1}(G/B)$ также параметризуются элементами группы Вейля. Как итог, имеем отображение

$$W \to \left\{\begin{array}{c}\text{орбитальные}\\ \text{многообразия}\\ \text{Джозефа}\end{array}\right\}.$$

Из идущего выше описания несложно вытащить явную формулу для этого отображения:

$$w \to B \cdot (\mathfrak{n} \cap w(\mathfrak{n})). \tag{4}$$

Замечание 2. Сравнение результатов этой секции с результатами предыдущей подсекции даёт отображение

$$S_n \to \left\{ \begin{array}{c} \text{стандартные} \\ \text{таблицы Юнга} \end{array} \right\}.$$

Это отображение может быть определено также и в чисто комбинаторных терминах — одна из двух таблиц, вырабатываемых алгоритмом Робинсона-Шенстеда — мы обсудим этот алгоритм в следующей лекции.

Замечание 3. Отображение (4) сюръективно, но не инъективно; оно является биекцией при ограничении на подмножество специальных инволюций в W. Для $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(n)$, любая инволюция является специальной.

Список литературы

[Di] J. Dixmier, Algebres Enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974. (доступен перевод на русский и на английский)

[Hu] J. Humfreys, *Representations of semisimple Lie algebras in BGG category $\mathcal{O}$*, Graduate Studies in Math. **94**, AMS.

[CM] D. Collingwood, W. McGovern, Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras, Van Nostrand Reinhold Math. Ser., Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.

[NG] N. Chriss, V. Ginzburg, Representation theory and complex geometry, Birkhäuser Boston, 1997.

[KL] G. Krause, T. Lenagan, Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension, AMS Grad. Studies in Math. **22**, 2000.

[Ja] J. C. Jantzen, Nilpotent Orbits in Representation Theory, DOI: 10.1007|978-0-8176-8192-01.

[Br] M. Brion, Lectures on the geometry of flag varieties, https://arxiv.org/abs/math/0410240.