Лекция 2, Часть 1: обозначения, связанные с полупростыми алгебрами Ли

Полупростые алгебры Ли — специфический диалект общематематического языка и его изучение занимает какое-то время. Этот материал неплохо изложен в [VO, Bou]. В лекции я хочу определить все понятия этого языка для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$ (алгебра Ли матриц $n \times n$ следа 0).

Как векторное пространство алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n)$ совпадает с матрицами $n \times n$ и следа 0. Легко видеть, что операция коммутирования $[A, B] = AB - BA$ сохраняет это подпространство. Пара из пространства и операции из предыдущих двух предложений есть алгебра Ли.

Обозначим через $\mathfrak{h}$ подпространство диагональных матриц в $\mathfrak{sl}(n)$; $\mathfrak{h}$ называется Картановской подалгеброй алгебры $\mathfrak{sl}(n)$. Обозначим через $\mathfrak{b}$ подпространство нестрого верхнетреугольных матриц в $\mathfrak{sl}(n)$; $\mathfrak{b}$ называется Борелевской подалгеброй алгебры $\mathfrak{sl}(n)$. Очевидно, что $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$.

Обозначим через $e_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ матричные единицы в алгебре матриц. Диагональные матрицы, очевидно, совпадают с матрицами вида $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i e_{ii}$. Обозначим через ε_i функцию из $\mathfrak{h}$ в $\mathbb{C}$, переводящую $\sum_i a_i e_{ii}$ в a_i; $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ и $\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n = 0$. Мы имеем $[h, e_{ij}] = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h) e_{ij}$ для любой диагональной матрицы $h \in \mathfrak{h}$ и любых i, j.

Совокупность Δ векторов $\varepsilon_i - \varepsilon_j \in \mathfrak{h}^*, i \neq j$, называется системой корней алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$. Из определения видно, что имеет место биекция между элементами Δ и матричными единицами вне главной диагонали; в связи с этим, мы иногда будем обозначать e_{ij} как e_α, где $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$. Положим

$$\Delta^+ := \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid e_{ij} \in \mathfrak{b}\} = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i < j\},$$

$$\Pi := \{\alpha \in \Delta^+ \mid \forall \beta, \gamma \in \Delta^+ (\alpha \neq \beta + \gamma)\} = \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \mid 1 \leq i < n\}.$$

Билинейная форма $(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$ называется формой Килинга алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$. Она симметрична, невырожденна и удовлетворяет условию

$$([A, B], C) + (B, [A, C]) = 0.$$

Ограничение $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{h}$ так же невырожденно. Это позволяет определить двойственную форму на $\mathfrak{h}^*$ (и обозначается она всё равно $(\cdot, \cdot)$). Для всякого $\alpha \in \mathfrak{h}^*, (\alpha, \alpha) \neq 0$, положим $s_\alpha(v) := v - 2\frac{(\alpha, v)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$. Легко проверить, что $(\alpha, \alpha) = 2 \forall \alpha \in \Delta$ и что $s_\alpha(\Delta) = \Delta \forall \alpha \in \Delta$. Группа, порождённая преобразованиями $s_\alpha, \alpha \in \Delta$, называется группой Вейля $\mathfrak{sl}(n)$. Легко проверить, что (в случае $\mathfrak{sl}(n)$)

- $s_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ переставляет ε_i и ε_j и оставляет на месте $\varepsilon_k, k \neq i, j$,
- W совпадает с группой перестановок множества $\{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$.
- W порождается элементами $s_\alpha, \alpha \in \Pi$.

1.1. **Конечномерные представления полупростых алгебр Ли.** Для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ мы фиксируем набор данных $(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{h})$, а также связанный с этим выбором набор данных (Δ, Δ^+, Π). Положим $\mathfrak{n} := [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$; $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$.

Пусть V — это простой конечномерный $\mathfrak{g}$. Тогда существует и единственный вектор $\lambda_V \in \mathfrak{h}^*$ и существует вектор $v \in V$, для которых

$$n \cdot v = 0 \forall n \in \mathfrak{n}, \quad h \cdot v = \lambda_V(h) v \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Вектор v единственнен с точностью до пропорциональности. Так же выполнено условие

$$2\frac{(\lambda_V, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \forall \alpha \in \Pi. \tag{1}$$

Обозначим через P^+ подмножество векторов из $\mathfrak{h}^*$, удовлетворяющих условию (1). Из сказанного выше следует, что корректно определено отображение

$$\{\text{простые конечномерные } \mathfrak{g}\text{-модули}\} \to P^+, \quad V \to \lambda_V.$$

Оказывается, что это отображение является биекцией. Для всякого $\lambda \in P^+$, будем обозначать как $V(\lambda)$ соответствующий конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль.

Разберёмся теперь что это условие значит для $\mathfrak{sl}(n)$. Вектора $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}$ образуют базис в $\mathfrak{h}^*$; выберем $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и представим его в виде $\lambda = \lambda_1 \varepsilon_1 + ... + \lambda_{n-1} \varepsilon_n$. Условие (1) эквивалентно следующим условиям

$$2\frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \lambda)}{(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \iff \lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \forall i < n.$$

В совокупности из этих условий следует, что $\lambda_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i < n$ и что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_{n-1} \geq 0$. Таким образом, конечномерные представления $\mathfrak{sl}(n)$ могут быть отождествлены со следующей полугруппой:

$$\{(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1} \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_{n-1} \geq 0\}.$$

Лекция 2, Часть 2: Определение категории $\mathcal{O}$ и свойства модулей Верма

Для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ мы фиксируем набор данных $(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{h})$, а также связанный с этим выбором набор данных (Δ, Δ^+, Π). Положим $\mathfrak{n} := [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$; $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, $\Delta^- = \Delta \backslash \Delta^+ = -\Delta^+$, $\mathfrak{n}_- := \mathrm{span}\{e_\alpha\}_{\alpha \in \Delta^-}$. Легко проверить, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}_- = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$. Через $\mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi$ обозначается полугруппа, порождённая элементами Π.

Определение 1. $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-модуль M принадлежит категории $\mathcal{O}$, если выполнены следующие условия

- M конечно порождён как $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-модуль;
- действие $\mathfrak{h}$ на M полупросто, т.е. $M = \oplus_{\nu \in \mathfrak{h}^*} M_\nu$ и $hm_\nu = \nu(h)m_\nu$ для всех $m_\nu \in M_\nu$ и $h \in \mathfrak{h}$;
- действие $\mathfrak{n}$ на M локально нильпотентно, т.е. $\forall m \in M \exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \mathfrak{n}^k m = 0$.

Классическим источником базовых фактов про категорию $\mathcal{O}$ считается диссертация Йенса Карстена Янцена [Ja]. Основные свойства модулей категории $\mathcal{O}$:

Свойство 1. Для всякого модуля M из категории $\mathcal{O}$ имеем $\dim M_\nu < \infty$ для всех $\nu \in \mathfrak{h}^*$.

Свойство 2. Для всякого модуля M из категории $\mathcal{O}$ существует идеал m конечной коразмерности в $Z(\mathfrak{g})$, для которого $mM = 0$.

Свойство 3. Всякий модуль M из категории $\mathcal{O}$ имеет конечную длину.

Лекция посвящена доказательству свойств 1-2. Как первый шаг мы построим серию модулей категории $\mathcal{O}$, параметризованную $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, и докажем аналоги сформулированных выше свойств для этих модулей.

Фиксируем $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Зададим 1-ое представление $\mathbb{C}_\lambda$ алгебры Ли $\mathfrak{b}$ с образующим элементом v_λ по следующему правилу:

$$\mathfrak{n} \cdot v_\lambda = 0, h \cdot v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Положим

$$M(\lambda) := \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda.$$

Свойство 4. а) $\dim M(\lambda)_\nu \neq 0$ только если $\lambda - \nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi$;
б) размерность $M(\lambda)_\nu$ равна числу наборов $\{(p_\alpha)_{\alpha \in \Delta^+} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{|\Delta^+|} \mid \sum_{\alpha \in \Delta^+} p_\alpha \alpha = \mu - \nu\}$;
в) $\dim M(\lambda)_\nu < |\Delta^+|^{(\xi, \lambda - \nu)}$, где ξ — это единственный вектор для которого $(\xi, \alpha) = 1 \forall \alpha \in \Pi$.
в') $\dim M(\lambda)_\lambda = 1$.

Свойство 5. Существует максимальный идеал $m \subset Z(\mathfrak{g})$, для которого $mM(\lambda) = 0$; мы будем обозначать этот идеал $m(\lambda)$.

Первое из этих свойств использует явный базис в $M(\lambda)$, а все остальные легко выводятся из первого.

1.2. **Базис $M(\lambda)$.** Модули $M(\lambda)$ имеют достаточно простую структуру (по крайней мере - достаточно приличный базис), который строится с помощью теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта для $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Теорема 1 (Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта). Если $e_1, ..., e_m$ — это базис алгебры Ли $\mathfrak{k}$, то

$$\{e_1^{d_1} ... e_m^{d_m}\}_{d_1, ..., d_m \geq 0}$$

— это базис в $\mathrm{U}(\mathfrak{k})$.

Следствие 1. Если $\mathfrak{g}$ — это полупростая алгебра Ли, а $h_1, ..., h_r$ — это некоторый базис в $\mathfrak{h}$, то

$$\{\prod_{\alpha \in \Delta^-} e_\alpha^{p_\alpha} \prod_{i \leq r} h_i^{q_i} \prod_{\beta \in \Delta^+} e_\beta^{r_\beta}\}_{p_\alpha, q_i, r_\beta \geq 0}$$

— это базис в $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Следствие 2. $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ является свободным правым $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$-модулем с базисом

$$\{\prod_{\alpha \in \Delta^-} e_\alpha^{p_\alpha}\}_{p_\alpha \geq 0}.$$

Следствие 3. Вектора вида
$$\{\prod_{\alpha\in\Delta^-} e_\alpha^{p_\alpha} v_\lambda\}_{p_\alpha\geq 0}$$
образуют базис модуля $M(\lambda)$ при любом $\lambda\in\mathfrak{h}^*$.

Следствие 4. $M(\lambda)$ является свободным одномерным модулем над $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)$ с единственным базисным вектором v_λ при любом $\lambda\in\mathfrak{h}^*$.

1.3. Доказательство свойств 4-5.

Доказательство свойства 4. Вектор $\prod_{\alpha\in\Delta^-} e_\alpha^{p_\alpha} v_\lambda$ имеет вес $\lambda+\sum_{\alpha\in\Delta^-} p_\alpha\alpha$. Из этого легко выводится а) и б).

Существование вектора ξ следует из невырожденности $(\cdot,\cdot)$ и линейной независимости векторов из Π. Из определения Π следует, что $(\xi,\alpha)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ для всех $\alpha\in\Delta^+$. Из этого легко вывести в) и в'). □

Доказательство свойства 5. Так как $Z(\mathfrak{g})$ коммутирует с $\mathfrak{h}$, мы имеем что $Z(\mathfrak{g})$ сохраняет $M(\lambda)_\nu \forall\nu\in\mathfrak{h}^*$. Следовательно, $Z(\mathfrak{g})$ сохраняет $M(\lambda)_\lambda$. Это задаёт гомоморфизм $Z(\mathfrak{g})\to \mathrm{End} M(\lambda)_\lambda$; обозначим ядро этого гомоморфизма m. Так как $\dim M(\lambda)_\lambda=1$ имеем $\mathrm{End} M(\lambda)_\lambda\cong\mathbb{C}$. Следовательно, m — максимальный идеал. Так как $M(\lambda)=\mathrm{U}(\mathfrak{g})M(\lambda)_\lambda$ имеем $mM(\lambda)=0$. □

1.4. Доказательство свойств 1-2.

Доказательство свойства 1. Пусть M^0 — это конечномерное порождающее пространство $\mathfrak{g}$-модуля M. Пусть M^1 — это наименьшее $\mathfrak{h}$-стабильное подпространство, содержащее M^0. Из определения объектов категории O, легко видеть, что M^1 конечномерно. Пусть M^2 — это наименьшее $\mathfrak{n}$-стабильное подпространство, содержащее M^1. Из определения объектов категории O, легко видеть, что M^2 конечномерно и стабильно относительно действия $\mathfrak{b}$. Пусть $\lambda_1,...,\lambda_s\in\mathfrak{h}^*$ — это все $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, для которых $M^2\cap M_\lambda\neq 0$. Применяя рассуждения, аналогичные рассуждениям, использованным при доказательстве следствия 4, имеем:

а) $\dim M_\nu\neq 0$ только если $\lambda_i-\nu\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi$ для какого-то $i\leq s$;

б) размерность M_ν не превышает числа наборов
$$\{(\lambda_i,(p_\alpha)_{\alpha\in\Delta^+})\in\mathfrak{h}^*\times\mathbb{Z}_{\geq 0}^{|\Delta.^+|}\mid \sum_{\alpha\in\Delta^+} p_\alpha\alpha=\lambda_i-\nu\};$$

в) $\dim M_\nu< f(\lambda_1,...,\lambda_s,\nu)$ для некоторой функции f.

в') $\dim M_{\lambda_i}=1$ для какого-то $i\leq s$.

□

Доказательство свойства 2. Так как $Z(\mathfrak{g})$ коммутирует с $\mathfrak{h}$, мы имеем что $Z(\mathfrak{g})$ сохраняет $M(\lambda)_\nu\forall\nu\in\mathfrak{h}^*$. Определим $M^2,\lambda_1,...,\lambda_s$ как в свойстве 4. Положим $M^3=M_{\lambda_1}\oplus M_{\lambda_2}\oplus...\oplus M_{\lambda_s}$. По свойству 4 имеем $\dim M^3<\infty$.

Из сказанного выше следует, что $Z(\mathfrak{g})$ сохраняет M^3. Это задаёт гомоморфизм $Z(\mathfrak{g})\to\mathrm{End} M^3$; обозначим ядро этого гомоморфизма m. Так как $\dim M^3<\infty$ имеем $\dim\mathrm{End} M^3<\infty$. Следовательно, m имеет конечную коразмерность в $Z(\mathfrak{g})$. Так как $M=\mathrm{U}(\mathfrak{g})M^0=\mathrm{U}(\mathfrak{g})M^1=\mathrm{U}(\mathfrak{g})M^2=\mathrm{U}(\mathfrak{g})M^3$, мы имеем $mM=0$. □

1.5. Уникальные свойства $M(\lambda)$.

Свойство 6. $M(\lambda)$ имеет подмодуль $Msub(\lambda)\subsetneq M(\lambda)$, содержащий все остальные собственные подмодули.

Доказательство. Очевидно, что если такой подмодуль $Msub(\lambda)$ существует, то он равен сумме всех собственных подмодулей модуля M. Положим
$$Msub(\lambda):=\sum_{M'\subsetneq M} M'.$$

Заметим, что
$$Msub(\lambda)_\nu:=\sum_{M'\subsetneq M} M'_\nu$$

для любого $\nu \in \mathfrak{h}^*$. Если $M(\lambda)_\lambda \subset M'$ для какого-либо подмодуля $M' \subset M(\lambda)$, то $M' = M(\lambda)$. Следовательно, $M'_\lambda = 0$ для всех собственных подмодулей M', и, в частности, $Msub(\lambda)_\lambda = 0$. Это доказывает, что $Msub(\lambda) \neq M(\lambda)$. □

Следствие 5. Модуль $M(\lambda)$ имеет единственный простой фактор; этот фактор обозначается $L(\lambda)$.

Обозначим через $\chi_\lambda, \lambda \in \mathfrak{h}^*$, гомоморфизм алгебр, заданный отображением $Z(\mathfrak{g}) \to Z(\mathfrak{g})/m(\lambda) \cong \mathbb{C}$.

Свойство 7. Для всякого $f \in Z(\mathfrak{g})$ существует $p \in S(\mathfrak{h})$, для которого $fm_\lambda = p(\lambda)m_\lambda$ для всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*, m_\lambda \in M(\lambda)$.

Доказательство. Из следствия 1 легко видеть, что

$$f = \sum_{i \leq s} u_i^- u_i^0 u_i^+,$$

где $u_i^- \in \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-), u_i^0 \in \mathrm{U}(\mathfrak{h}), u_i^+ \in \mathrm{U}(\mathfrak{n})$. Без ограничения общности мы можем считать, что u_i^+, u_i^- однородны относительно действия $\mathfrak{h}$ и имеют веса $\lambda_i^- \in -\mathbb{Z}\Pi, \lambda_i^+ \in \mathbb{Z}\Pi$. Так как $f \in \mathbb{Z}(\mathfrak{g})$ имеем что $[\mathfrak{h}, f] = 0$. Отсюда следует, что $\lambda_i^- + \lambda_i^+ = 0$, если $u_i^+, u_i^0, u_i^- \neq 0$. Если $\lambda_i^+ \neq 0$ мы имеем что

$$(u_i^- u_i^0 u_i^+) \cdot v_\lambda = 0.$$

Т.е. ненулевой вклад в $f \cdot v_\lambda$ даёт только член с $u_k^- = u_k^+ = 1$. Из чего легко видеть, что искомое равенство выполнено для $p = u_k^0$. □

Следствие 6. Существует гомоморфизм $\psi : Z(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})$, для которого

$$f \cdot m_\lambda = (\psi(f))(\lambda) m_\lambda \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*, \forall m_\lambda \in M(\lambda), \forall f \in Z(\mathfrak{g})$$

.

Свойство 8. Для всякого $f \in Z(\mathfrak{g})$ и всякого $w \in W$ верно, что

$$m(\lambda) = m(w \cdot (\lambda + \rho) - \rho), \quad \chi_\lambda(f) = \chi_{w\cdot(\lambda+\rho)-\rho}(f). \tag{2}$$

Доказательство. Легко видеть, что формула $w \cdot (\lambda + \rho) - \rho$ соответсвует сопряжению действия W на $\mathfrak{h}^*$ с помощью сдвига на ρ. Отсюда следует что (2) достаточно проверить для $w = s_\alpha, \alpha \in \Pi$. В этом случае (2) перевоформулируется так:

$$m(\lambda) = m(s_\alpha \lambda - \alpha), \quad \chi_\lambda(f) = \chi_{s_\alpha \lambda - \alpha}(f) \tag{3}$$

так как $s_\alpha \rho - \rho = -\alpha$. В силу следствия 6 условие (3) достаточно проверить для подмножества, плотного в $\mathfrak{h}^*$; мы проверим условие (3) для $P^+ \subset \mathfrak{h}^*$.

Фиксируем $\lambda \in P^+$. Из существования в модуле $V(\lambda)$ вектора v_λ старшего веса λ следует существование ненулевого отображения

$$q_\lambda : M(\lambda) \to V(\lambda).$$

В силу того, что $V(\lambda)$ прост, мы имеем что это q_λ сюръективно, и, следовательно, $V(\lambda) \cong L(\lambda)$ — это единственный простой фактор $M(\lambda)$.

Рассмотрим $\mathfrak{sl}(2)$-подалгебру $\mathfrak{k} := \{e_\alpha, e_{-\alpha}, [e_\alpha, e_{-\alpha}]\}$, порождённую $e_\alpha, e_{-\alpha}$; обозначим её $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$. Рассмотрим вектора вида $e_{-\alpha}^n v_\lambda$ в $M(\lambda)$. В силу свойства 4 мы имеем что

$$\dim M(\lambda)_{\lambda - n\alpha} = 1 \text{ и } M(\lambda)_{\lambda - n\alpha} = \mathbb{C} e_{-\alpha}^n v_\lambda.$$

Легко видеть, что

$$N(\alpha) = \oplus_{n \geq 0} M(\lambda)_{\lambda - n\alpha}$$

это $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$ подмодуль Верма в $M(\lambda)|_{\mathfrak{sl}(2)_\alpha}$. Образ $N(\alpha)$ в $V(\lambda)$ обязан быть конечномерным, и, следовательно,

$$e_{-\alpha}^{2\frac{(\lambda,\alpha)}{\alpha,\alpha}+1} v_\lambda \in Msub(\lambda).$$

В то же время,

$$\mathbb{C} v_\lambda = \mathbb{C}(e_\alpha^{2\frac{(\lambda,\alpha)}{\alpha,\alpha}} e_{-\alpha}^{2\frac{(\lambda,\alpha)}{\alpha,\alpha}} v_\lambda)$$

(это следует из описания структуры $\mathfrak{sl}(2)$-модулей старшего веса.) Отсюда имеем, что $e_{-\alpha}^{2\frac{(\lambda,\alpha)}{\alpha,\alpha}+1} v_\lambda$ является вектором старшего веса в $Msub(\lambda)$. Следовательно, есть ненулевое отображение

$$M(s_\alpha \lambda - \alpha) = M(\lambda - (2\frac{(\alpha,\lambda)}{(\alpha,\alpha)} + 1)\alpha) \to Msub(\lambda) \subset M(\lambda).$$

Следовательно, $m(\lambda)$ и $m(s_\alpha\lambda - \alpha)$ аннулируют $e_{-\alpha}^{2\frac{(\lambda,\alpha)}{\alpha,\alpha}+1}v_\lambda$. Далее, $m(\lambda) + m(s_\alpha\lambda - \alpha)$ аннулируют $e_{-\alpha}^{2\frac{(\lambda,\alpha)}{\alpha,\alpha}+1}v_\lambda$. Если $m(\lambda) \neq m(s_\alpha\lambda - \alpha)$, то $m(\lambda) + m(s_\alpha\lambda - \alpha) = Z(\mathfrak{g})$. Следовательно, $m(\lambda) = m(s_\alpha\lambda - \alpha)$. Из этого немедленно следует что $\chi_\lambda = \chi_{s_\alpha\lambda-\alpha}$. □

Список литературы

[Di] J. Dixmier, Algebres Enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974. (доступен перевод на русский и на английский)

[Hu] J. Humfreys, *Representations of semisimple Lie algebras in BGG category $\mathcal{O}$*, Graduate Studies in Math. **94**, AMS.

[Ja] J.C. Jantzen, *Moduln mit einem höchsten Gewicht*, LNM **750**, Berlin, New York: Springer-Verlag.

[VO] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по алгебраическим группам и группам Ли.*

[Bou] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. VII-VIII. (доступен перевод на русский, на английский - не нашёл)