Свойства дифференцируемых отображений

9◇1. а) Приведите пример недифференцируемой в точке $(0,0)$ функции, непрерывной и имеющей ограниченные частные производные по x и y в некоторой её окрестности.
б) Приведите пример дифференцируемой в точке $(0,0)$ функции, у которой частные производные по x и y разрывны в нуле и неограничены в любой окрестности нуля.

9◇2. Для норм $\|x\|_1 = \sum |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$ и $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ на векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ найдите множество точек, в которых функции $f_i(x) = \|x\|_i$, $i = 1, 2, \infty$ дифференцируемы.

9◇3. Может ли дифференцируемое отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ переводить ось абсцисс $\{(x, |x|) \in \mathbb{R}^2)\}$?

9◇4. Найдите дифференциал отображения $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2} \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ пространства квадратных матриц с вещественными координатами в себя, переводящего всякую матрицу в её квадрат, в точке $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

9◇5. Покажите что отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, переводящее точку $(x_1, \ldots, x_n)$ в коэффициенты многочлена $(y - x_1)\cdots(y - x_n)$ дифференцируемо. Чему может равняться ранг дифференциала df в точке $a \in \mathbb{R}^n$?

9◇6. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ выпуклый[1] компакт. Будет ли отображение $f(x) = y$, где $y \in K$ — точка с наименьшим расстоянием до x, всюду дифференцируемой? Если да, то какой ранг может иметь его дифференциал в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$?

9◇7. Пусть f непрерывно дифференцируема на открытом подмножестве $U \in \mathbb{R}^2$ и $\frac{\partial f}{\partial y}|_U \equiv 0$. Верно ли что $f(x, y)$ не зависит от y для $(x, y) \in U$?

9◇8. Для фиксированных $a, b \in \mathbb{R}$ найдите все дифференцируемые на $\mathbb{R}^2$ функции для которых $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ во всех точках $\mathbb{R}^2$. Тот же вопрос для $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial x}{\partial y} = 0$ и $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

9◇9. Покажите, что если функция имеет ограниченные частные производные на выпуклой ограниченной области U, то она равномерно непрерывна на U.

9◇10. Приведите пример такого отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, что ранг его дифференциала не равен двум только в одной точке.

[1]Напомним, что множество называется *выпуклым*, если две любые его точки содержатся в нём вместе с отрезком, их соединяющим.