Дифференцирование и производные

8◇1. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема, $f'(x) \neq 0$ на всём отрезке и $f(a) \neq f(b)$. Обязательно ли найдётся $\xi \in [a,b]$ такая что $f'(\xi) = \overrightarrow{f(a)f(b)}$

8◇2. Пусть $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ многочлен. Вычислите

$$D\big(P(x)\big) = \left(\frac{1}{0!}1 + \frac{1}{1!}\frac{d}{dx} + \frac{1}{2!}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \cdots\right) P(x)$$

8◇3. Пусть $y = f(x)$ пять раз непрерывно дифференцируема в нуле и выполняется $x^3 + 3xy + y^3 = 0$. Найдите $f'(0), \ldots, f^{(5)}(0)$.

8◇4. Пусть $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ n раз непрерывно дифференцирцуема на (a,b) и имеет $n+1$ нуль. Покажите, что найдётся $\xi \in (a,b)$ такая что $f^{(n)}(\xi) = 0$

8◇5. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируемая и для всякой точки $x \in \mathbb{R}$ существует такое $k \in \mathbb{N}$ что $f^k(x) = 0$. Покажите что f многочлен.

8◇6. Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема, $f(0) = f(1) = 0$ и $|f''(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in [0,1]$. Найдите наибольшее возможное значение f на $[0,1]$.

8◇7. Определим $\operatorname{tg} x$ как бесконечно диффференцируемую в окрестности нуля функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению $f'(x) = f^2(x) + 1$ и условию $f(0) = 0$. Найдите рекуррентную формулу для коэффициентов разложения

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^k)$$

8◇8. Определим $\sin x$ как бесконечно дифференцируемую в окрестности нуля функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению $f''(x) + f(x) = 0$ и условиям $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Найдите в точке $t = 0$ с точностью до $o(t^8)$ разложение по t решения уравнения физического маятника: $f''(t) + \sin f(t) = 0$.

8◇9. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируемая, непостоянная на отрезке $[a,b]$ и имеет на нём счётное число нулей. Покажите что

$$\sup_{k,x} |f^{(k)}(x)| = \infty$$

8◇10. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая и уравнение $f(x) = x$ имеет единственный корень $x = x_0$, причём $0 < f'(x_0) < 1$. По произвольному $a_0 \neq x_0$ построим последовательность $a_k = f(a_{k-1})$. Докажите, что предел

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k - x_0}{\big(f'(x_0)\big)^k}$$

существует, конечен, и не равен нулю.

8◇11. Пусть $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ произвольная последовательность вещественных чисел. Постройте на прямой бесконечно дифференцируемую функцию такую что $f^{(k)}(0) = a_k$.