Пределы и предельные точки

3◇1. Если $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится и f — непрерывное отображение, то $f\Big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\Big) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.

3◇2. Покажите, что если f переводит предельные точки всякого множества в предельные точки его образа, то f непрерывно.

3◇3. а) В хаусдорфовом пространстве предел сходящейся последовательности единственнен.
б) Покажите, что из из единственности предела всякой сходящей последовательности a_n в пространстве X следует, что все точки пространства замкнуты.
в) Если предел всякой последовательности единственен, то пространство хаусдорфово.

3◇4. Верно ли что если f непрерывно, и $b_n = f(a_n)$ сходится, то a_n тоже сходится?

3◇5. Найдите предел последовательности $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} - \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots - (-1)^n \dfrac{1}{n(n+1)}$.

3◇6. Сходится ли в $\mathbb{Q}$ последовательность $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$?

3◇7. По аналогии с конструкцией $\widetilde{\mathbb{N}}$ определим $\overline{\mathbb{R}^2}$ как с $\mathbb{R}^2$ с добавленной точкой ∞ и объявим открытыми во-первых, открытые множества $\mathbb{R}^2$ и во-вторых, такие подмножества $\overline{\mathbb{R}^2}$ которые содержат окрестность точки ∞ вида $U_k = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>k^2\}$ и при этом их пересечение с $\mathbb{R}^2$ открыто в $\mathbb{R}^2$. Покажите, что $\overline{\mathbb{R}^2}$ гомеоморфно сфере $S^2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$.

▷ *Базой окрестностей* точки x называется такой набор $\mathcal{B}$ окрестностей x, что всякая окрестность x содержит некоторую окрестность из $\mathcal{B}$. В пространстве X выполняется первая аксиома счётности если для всякой его точки существует счётная база окрестностей. Все пространства в задачах ниже предполагаются таковыми.

3◇8. Верно ли, что замыкание $\overline{M}\subset X$ — множество пределов всех последовательностей из M?