Топологические пространства

▷ Ниже в описаниях баз и топологий пустое множество и все пространство всегда подразумеваются.

2◇1. Являются ли топологиями на абстрактном множестве X наборы
а) всех подмножеств, имеющих конечные дополнения;
б) всех подмножеств, имеющих не более чем счётные дополнения;
в) всех не более чем счётных подмножеств?
Если да, то будут ли эти пространства хаусдорфовыми?

2◇2. Покажите, что $\mathscr{F} = \{U \subset \mathbb{R} \,|\, \forall\, s \in U\; \exists\, t > s : [s, t) \in U\}$ является топологией на $\mathbb{R}$.

2◇3. Покажите, что набор, состоящий подмножеств натуральных чисел $\mathbb{N}$ не содержащих сколь угодно длинных арифметических прогрессий задаёт набор замкнутых множеств некоторой топологии на $\mathbb{N}$.
Указание. Указание: можно пользоваться теоремой Ван дер Вардена: $\forall n \in \mathbb{N}\; \exists N$ такое что при любом разбиении $\{1, \ldots, N\}$ на два подмножества в одном из них найдётся арифметическая прогрессия длины n.

2◇4. Покажите, что множество точек на котором совпадают значения двух различных отображений из топологического пространства в хаусдорфово замкнуто. Является ли хаусдорфовость для этого необходимой?

2◇5. Покажите, что если f и g непрерывные вещественнозначные функции на топологическом пространстве X, то их сумма, произведение, максимум, а в случае когда $0 \notin g(X)$ и отношение, также являются непрерывными функциями.

2◇6. Покажите что $\mathscr{B}$ является базой некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда
а) $\forall x \in X$ существует $V \in \mathscr{B}$ такой что $x \in V$;
б) $\forall\, V_1, V_2 \in \mathscr{B}$ существует набор $V_\alpha \in \mathscr{B}$ такой что $V_1 \cap V_2 = \cup V_\alpha$.

2◇7. Покажите, что отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда проекция $\pi_1\colon \Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y\} \xrightarrow{(x,y)\mapsto x} X$ является гомеоморфизмом.

2◇8. Покажите, что прямое произведение метрических пространств является метризуемым топологическим пространством, построив сответствующую метрику.

2◇9. Постройте пример отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такого, что при всех фиксированных $s, t \in \mathbb{R}$ функции $g_s(x) = f(x, s)$ и $h_t(y) = f(t, y)$ непрерывны на $\mathbb{R}$, но само отображение f при этом не является непрерывным.

2◇10. Существует ли непрерывная биекция из полуинтервала на окружность? Если да, постройте. Гомеоморфны ли эти пространства?

2◇11. Покажите, что следующие пространства гомеоморфны **а)** $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $S^{n-1} \times \mathbb{R}$;
б) $S_{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^{p+q} : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots x_{p+q}^2 = 1\}$ и $S^{p-1} \times \mathbb{R}^q$.