Задачи к экзамену по НИС «Представления и вероятность», осень 2018 г.

Задачи разбиты на три блока в соответствии с разделами курса. На оценку «отлично» (10) достаточно решить два из трёх блоков.

1

Задача 1.1. Напомним, что оператор $A\colon H \to H$ в комплексном гильбертовом пространстве имеет конечный след, если для некоторого (а значит, и для всех) ортонормированного базиса (e_n) верно, что $\sum_n \langle |A| e_n, e_n\rangle < \infty$, где $|A| = (A^*A)^{1/2}$ — абсолютная величина оператора.
(а) Приведите пример оператора A и базиса (e_n), для которых $\sum_n \bigl|\langle Ae_n, e_n\rangle\bigr| < \infty$, однако оператор A не имеет конечного следа.
(б) Покажите, что если ряд $\sum_n \bigl|\langle Ae_n, e_n\rangle\bigr|$ сходится для любого ортонормированного базиса (e_n), то A имеет конечный след.
(Указание: сведите задачу к самосопряжённому случаю, разлагая $A = B + iC$, где B, C самосопряжённые; затем воспользуйтесь спектральной теоремой.)

Задача 1.2. Определим бесконечные тёплицеву $t(a)$ и ганкелеву $h(a)$ матрицы, отвечающие двусторонне бесконечной последовательности $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$: именно, $t(a)_{ij} = a_{i-j}$, $h(a)_{ij} = a_{i+j+1}$. Рассмотрим их как операторы на пространстве $\ell^2(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum |x_n|^2 < \infty\}$. Докажите, что если $a_j = \widehat{f}_j$ — последовательность коэффициентов Фурье функции $f \in L^\infty([-\pi,\pi])$, то операторы $h(a)$, $t(a)$ корректно определены на $\ell^2(\mathbb{N})$ и их нормы не превосходят $\|f\|_\infty$.
(Указание: используйте изометрию Фурье между $\ell^2(\mathbb{Z})$ и $L^2([-\pi,\pi])$ и правильным образом подобранные проекторы $\ell^2(\mathbb{Z})$ на $\ell^2(\mathbb{N})$.)

2

Задача 2.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -x + \frac{1}{2}\cos x + (\sin ay - 1)\cos^2(\varepsilon^{-1}t) - 2x\sin x\cos(\varepsilon^{-1}t)\\
\frac{dy}{dt} &= x + x^2\sin(\varepsilon^{-1}t) + \sin^2 y\cos^2(\varepsilon^{-1}t),
\end{aligned}$$

где переменные $x, y \in \mathbb{R}$, а $\varepsilon \ll 1$ и $a \in \mathbb{R}$ — параметры системы. Найдите достаточное условие на параметр a, при котором система имеет асимптотически устойчивый предельный цикл, находящийся в окрестности порядка ε точки с координатами $x = 0$, $y = 0$. При решении этой задачи можно пользоваться результатами, сформулированными во время лекций.

Указание. Следуйте схеме, изложенной при анализе маятника Капицы. Первым делом перейдите в быстрое время $\tau = \varepsilon^{-1}t$ и введите третью переменную z так, чтобы система стала автономной и приняла вид, пригодный для применения теории усреднения.

Задача 2.2. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = \varepsilon f(y), \quad \dot{y} = \omega + \varepsilon g(x, y),$$

где $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{S}^1$, константа ω отлична от нуля, функция $f : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна, а функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{R}$ ограничена. Докажите, что существует константа C, такая что каждое решение системы $(x(t), y(t))$ удовлетворяет соотношению

$$|x(t) - x(0) - \varepsilon\langle f\rangle t| \leq C\varepsilon \quad \text{при } 0 \leq t \leq \varepsilon^{-1},$$

где $\langle f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\,ds$. То есть, медленная переменная x изменяется почти линейно на большом временном интервале.

При решении этой задачи нельзя пользоваться результатами, сформулированными на лекциях. То есть, вам придется доказать соответствующую теорему об усреднении самостоятельно. Доказательство должно быть строгим, в частности, запрещается отбрасывать члены порядка ε^2 без обоснования.

Указание. Так как f не зависит от x, теорема об усреднении в данном случае становится заметно проще.

3

Задача 3.1. Let V be a finite set, let $p\colon V \times V \to [0,1]$ be such that for all $x \in V$

$$\sum_{y\in V} p(x,y) = 1.$$

Assume that the associated Markov chain is irreducible and that there exists a measure $\pi\colon V \to (0,\infty)$ such that

$$\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x)$$

Prove, *without using the general results of the lectures*, the spanning tree formula

$$\pi(x) = C\sum_{\tau\in\mathcal{T}_x} w(\tau)$$

for some $C > 0$, where $\mathcal{T}_x$ is the set of the spanning trees rooted at x and $w(\tau)$ is the weight of the tree τ.
Remark: We already know that the formula holds true since π is invariant. The exercise asks for an independent combinatorial proof in the case $\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x)$.
Hint: Define a bijection from $\mathcal{T}_x$ to $\mathcal{T}_y$ to calculate the ratio of the sums $\sum_{\tau\in\mathcal{T}_x} w(\tau)$ in x and y.

Задача 3.2. Let $V = \{0,1,\ldots,N\}$, let $f\colon V \to (0,\infty)$ and define the transition probabilities:

$$p(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } y = x \pm 1 \text{ and } f(y) > f(x). \\ \frac{1}{2}\frac{f(y)}{f(x)} & \text{if } y = x \pm 1 \text{ and } f(y) \leq f(x). \\ 1 - p(x,x+1) - p(x,x-1) & \text{if } y = x. \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(a) Calculate the invariant measure of the associated Markov chain and the capacity between 0 and N.

For some $k \in V$, assume that f is strictly decreasing for $x \leq k$ and strictly increasing for $x \geq k$, so that k is the minimizer of f.
(b) Calculate the expected value of the number of times the Markov chain starting at 0 hits the point k before hitting N for the first time.