Листок 5.

Задача 1. Докажите, что всякое непустое открытое множество можно представить в виде объединения некоторого множества меры нуль по Лебегу и не более чем счетного набора попарно не пересекающихся открытых (a) кубов, (b) шаров. Докажите, что внешняя мера Лебега λ_n^*, которая определяется формулой

$$\lambda_n^*(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} |I_j|:\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\Big\},$$

где inf берется по всем покрывающим A конечным или счетным наборам параллелепипедов I_j с параллельными осям координат ребрами, не меняется при сдвигах и ортогональных преобразований.

Задача 2. Докажите, что борелевская сигма-алгебра (т.е. наименьшая по включению σ-алгебра, содержащая все открытые множества) на гладком многообразии, вложенном в $\mathbb{R}^n$, совпадает с сигма-алгеброй, состоящей из пересечений борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ с этим гладким многообразием.

Задача 3. (a) Найдите все неотрицательные борелевские конечные меры на единичной окружности, которые инвариантны относительно поворотов. (b) Найдите все неотрицательные борелевские конечные меры на $(0, +\infty)$, которые инвариантны относительно гомотетий $x \to \lambda x$.

Задача 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем число $\alpha \in (0, n]$. Для всякого множества A в $\mathbb{R}^n$ его внешняя α-мера Хаусдорфа $H^\alpha(A)$ задается так. Сначала при фиксированном $\delta > 0$ положим

$$H_\delta^\alpha(A) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{diam} F_k|^\alpha,\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,\ \operatorname{diam} F_k \le \delta\Big\},$$

где inf берется по всем счетным покрытиям A замкнутыми множествами диаметра не более δ. Существует (возможно, бесконечный) предел

$$H^\alpha(A) := \lim_{\delta\to 0} H_\delta^\alpha(A).$$

Докажите, что H^α не меняется при сдвигах и ортогональных преобразованиях. Выведите из этого утверждения, что на борелевской сигма алгебре $H^n = C\lambda_n^*$ для некоторой константы C.

Задача 5.

(a) Покажите, что $H^1 = \lambda_1^*$.

(b) Пусть A – компакт в $\mathbb{R}^n$. Для всякого $z \in \{x_n = 0\}$ через l_z обозначим прямую, перпендикулярную $\{x_n = 0\}$. Пусть $S(A) = \bigcup_z \{z\} \times [-q_z, q_z]$, где $q_z = \lambda_1(A \bigcap l_z)/2$. Докажите, что $\lambda_n(S(A)) = \lambda_n(A)$ и $\operatorname{diam} S(A) \le \operatorname{diam} A$.

(c) Докажите изодиаметрическое неравенство: $\lambda_n(A) \le c_n(\operatorname{diam} A/2)^n$, где c_n – объем единичного шара и A – произвольное компактное множество.

(d) Докажите, что $H^n = C\lambda_n^*$ на всех множествах и найдите константу C.

Задача 6. Докажите, что длина гладкой кривой на плоскости совпадает с ее внешней мерой Хаусдорфа порядка 1.

Задача 7. Докажите, что для всякой непрерывной функции u на $\mathbb{R}^n$ верно равенство

$$\int_{\|x\|\le R} u(x)\,dx = \int_0^R \int_{\|x\|=r} u(x)\,\sigma_{n-1}(dx)\,dr,$$

где σ_{n-1} — поверхностная мера на сфере.