НМУ
Алгебра 3

21 ноября 2018
Листок 10

# Группы Ext и Tor

Пусть k — фиксированное поле.

**Задача 1.** Вычислите

a) $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(M,N)$, где $M,N$ – конечные либо бесконечные циклические группы.

$b^\circ$) $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M,N)$, где $M,N$ – конечные либо бесконечные циклические группы.

c) $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{k}[t]}(M,N)$, где $M,N$ – модули вида $\mathrm{k}[t]$ либо $\mathrm{k}[t]/(t-a)^n$.

Определим комплекс Кошуля $K(x_1,\dots,x_n)$, это комплекс модулей над алгеброй $A := \mathrm{k}[x_1,\dots,x_n]$. Положим $K_i = \Lambda^i(A^n) = \Lambda^i(\oplus_{i=1}^n Ae_i)$ и

$$d_k(e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}) = \sum_{r=1}^{k}(-1)^r x_{i_r} e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_{r-1}}\wedge e_{i_{r+1}}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}.$$

**Задача 2.** a) Проверьте, что $K(x_1,\dots,x_n)$ — комплекс.

b) Покажите, что в $K(x_1,\dots,x_n)$ имеется подкомплекс $K(x_2,\dots,x_n)\otimes_{\mathrm{k}}\mathrm{k}[x_1]$, состоящий из членов, не содержащих $e_1$, а фактор по нему изоморфен $e_1\wedge K(x_2,\dots,x_n)\otimes_{\mathrm{k}}\mathrm{k}[x_1]$.

c) Покажите, что $K(x_1,\dots,x_n)$ есть конус морфизма умножения на $x_1$:

$$K(x_2,\dots,x_n)\otimes_{\mathrm{k}}\mathrm{k}[x_1]\xrightarrow{x_1}K(x_2,\dots,x_n)\otimes_{\mathrm{k}}\mathrm{k}[x_1].$$

d) Докажите, что $H_0(K(x_1,\dots,x_n)) = \mathrm{k}$, $H_i(K(x_1,\dots,x_n)) = 0$ при $i\neq 0$.

**Задача 3.** Вычислите

a) $\mathrm{Ext}^i_A(A,\mathrm{k})$, b) $\mathrm{Ext}^i_A(\mathrm{k},A)$, $c^\circ$) $\mathrm{Ext}^i_A(\mathrm{k},\mathrm{k})$ и d) $\mathrm{Tor}_i^A(\mathrm{k},\mathrm{k})$, где $A = \mathrm{k}[x_1,\dots,x_n]$;

e) $\mathrm{Ext}^i_A(\mathrm{k},A)$ и $\mathrm{Ext}^i_A(\mathrm{k},\mathrm{k})$, где $A = \mathrm{k}[x]/(x^2)$.

Подсказка: используйте резольвенту Кошуля.

**Задача 4.** Пусть $A$ — коммутативное кольцо без делителей нуля, $M$ — модуль над $A$ и $a\in A$. Вычислите $\mathrm{Tor}_i^A(A/(a),M)$.

Пусть $A = \{X\in M_m(\mathrm{k}) \mid X_{ij} = 0 \,\text{при}\, i>j\}$ — подалгебра в $M_n(\mathrm{k})$.

**Задача 5.** a) Выпишите явно умножение в $A$ в базисе $\{E_{ij}\}_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$.

Пусть $M$ — левый $A$-модуль. Обозначим $M_i := E_{ii}\cdot M$.

b) Покажите, что $M = \oplus_i M_i$ (прямая сумма векторных пространств).

c) Проверьте, что левое умножение на $E_{ij}$ переводит $M_j$ в $M_i$ и равно нулю на $M_s$ при $s\neq j$.

d) Убедитесь в том, что задание левого $A$-модуля равносильно заданию пространств $N_1,\dots,N_n$ и таких линейных отображений $\phi_{ij}\colon N_j\to N_i$ при всех $i<j$, что $\phi_{ij}\phi_{jk} = \phi_{ik}$. Как при этом описать гомоморфизмы $A$-модулей?

Обозначим через $S_{pq}$ такой $A$-модуль, что $(S_{pq})_i = \mathrm{k}$ при $p\leqslant i\leqslant q$, $(S_{pq})_i = 0$ иначе, а все $\phi_{ij}$ $p\leqslant i<j\leqslant q$ — тождественные.

**Задача 6.** a) Покажите, что модули $P_i := S_{1i}$ проективные при $i = 1\ldots n$, а модули $I_i := S_{in}$ — инъективные.

b) Покажите, что $A\cong\oplus_{i=1}^n P_i$ как левые модули.

**Задача 7.** Вычислите $\mathrm{Ext}^i_A(S_{pq},S_{p'q'})$.

**Задача 8.** Докажите, что любой конечно порождённый $A$-модуль изоморфен прямой сумме модулей вида $S_{pq}$.