Комплексы и когомологии

Задача 1. Любой стягиваемый комплекс есть прямая сумма сдвигов комплексов вида

$$\dots 0 \to M \xrightarrow{1_M} M \to 0 \dots$$

Задача 2 (5-лемма). Дан морфизм между точными последовательностями

$$\begin{tikzcd} K^1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & K^2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & K^3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & K^4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & K^5 \arrow[d, "f_5"] \\ L^1 \arrow[r] & L^2 \arrow[r] & L^3 \arrow[r] & L^4 \arrow[r] & L^5, \end{tikzcd}$$

причём среди f_i все, кроме f_3, – изоморфизмы. Покажите, что f_3 – тоже изоморфизм.

Сдвиг комплекса (K, d) – это комплекс $(K[1], d[1])$, где $K[1]^i = K^{i+1}, d[1]^i = -d^{i+1}$.

Пусть дан морфизм комплексов $f\colon K \to L$. Определим комплекс $C(f)$, называемый *конусом* f: положим $C^i = K^{i+1} \oplus L^i$ и

$$d^i_C(k^{i+1}, l^i) = (-d(k^{i+1}), f(k^{i+1}) + d(l^i)).$$

Задача 3°. a) Проверьте, что $C(f)$ – комплекс. b) Определите морфизмы $a\colon L \to C(f)$ и $b\colon C(f) \to K[1]$, покажите, что они образуют точную тройку

$$0 \to L \xrightarrow{a} C(f) \xrightarrow{b} K[1] \to 0.$$

c) Докажите, что связывающие гомоморфизмы $H(K) \to H(L)$ для указанной точной тройки совпадают с гомоморфизмами, индуцированными f.

Задача 4. Проверьте, что в последовательности

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{a} C(f) \xrightarrow{b} K[1] \xrightarrow{f[1]} L[1]$$

композиции af и $f[1]b$ гомотопны нулю.

Задача 5. Проверьте, что

a) морфизм комплексов — квазиизоморфизм $\iff$ его конус ацикличен;

b^*) морфизм комплексов — гомотопическая эквивалентность $\iff$ его конус стягиваем.

Пусть K и L – комплексы. Определим *комплекс морфизмов* $\underline{\mathrm{Hom}}(K, L)$ следующим образом. Положим

$$\underline{\mathrm{Hom}}(K, L)^i = \prod_n \mathrm{Hom}(K^n, L^{n+i}),$$

а дифференциал d^i переводит семейство $(f^n) \in \underline{\mathrm{Hom}}(K, L)^i$ в семейство $(g^n) \in \underline{\mathrm{Hom}}(K, L)^{i+1}$,

$$g^n = df^n - (-1)^i f^{n+1} d.$$

Задача 6°. a) Проверьте, что это действительно дифференциал. b) Покажите, что циклы в $\underline{\mathrm{Hom}}(K, L)$ — это морфизмы комплексов $K \to L[i]$, границы — морфизмы, гомотопные нулю, а когомологии — морфизмы $K \to L[i]$ в гомотопической категории комплексов.

Задача 7. Пусть $f\colon K \to L$ — морфизм комплексов. Покажите, что для любого комплекса X имеются длинные точные последовательности

$$\dots \mathrm{Hom}(X, K) \to \mathrm{Hom}(X, L) \to \mathrm{Hom}(X, C(f)) \to \mathrm{Hom}(X, K[1]) \to \mathrm{Hom}(X, L[1]) \to \dots$$
$$\dots \mathrm{Hom}(K, X) \leftarrow \mathrm{Hom}(L, X) \leftarrow \mathrm{Hom}(C(f), X) \leftarrow \mathrm{Hom}(K[1], X) \leftarrow \mathrm{Hom}(L[1], X) \leftarrow \dots,$$

где Hom обозначает группу морфизмов в гомотопической категории.