НМУ
Алгебра 3

31 октября 2018
Листок 7

Факторы по действию групп

Пусть S — алгебра над полем k и конечная группа G действует автоморфизмами на S. Пусть $S^G = \{s \in S \mid g(s) = s\} \subset S$ – алгебра инвариантов. Пусть $|G| \neq 0$ в поле k. Определим оператор усреднения $m\colon S \to S$: $m(s) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g(s)$.

Задача 1. a) Проверьте, что m — гомоморфизм S^G-модулей.

b) Проверьте, что m — проектор на S^G.

Пусть алгебра S градуирована: $S = \oplus_{i\geqslant 0} S_i$ и нётерова, $S_0 = \mathrm{k}$, группа G действует на S однородными автоморфизмами. Обозначим $R := S^G$, это градуированная подалгебра в S. Пусть $I \subset S$ — идеал в S, порождённый $\oplus_{i>0} R_i$. Пусть $f_1, \dots, f_n$ — однородные образующие I.

Задача 2. a) Проверьте, что алгебра R градуированная, а идеал $I \subset S$ однородный. Почему можно выбрать такие f_i?

b) Покажите, что $f_1, \dots, f_n$ порождают алгебру R над k.

Пусть теперь конечная группа G действует на аффинном многообразии X. Как построить фактор? Определим действие G на алгебре $A = \mathrm{k}[X]$ формулой $g(f)(x) := f(g^{-1}(x))$.

Задача 3. a°) Покажите, что алгебра A *цела* над A^G, т.е. любой $a \in A$ является корнем некоторого многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_i \in A^G$.

b°) Покажите, что A *конечна* над A^G, т.е. A — конечно порождённый A^G-модуль.

Задача 4 (Теорема Гильберта об инвариантах). Пусть $|G| \neq 0$ в k. Тогда алгебра $\mathrm{k}[X]^G$ конечно порождена. Подсказка: сведите к задаче 2, построив подходящий эпиморфизм $S = \mathrm{k}[y_1, \dots, y_n] \to \mathrm{k}[X]$. Геометрически это отвечает G-эквивариантному вложению $X \to \mathbb{A}^n$, где G действует на $\mathbb{A}^n$ линейным представлением.

Задача 5. Пусть $\mathrm{k} = \bar{\mathrm{k}}$. a) Докажите, что алгебра $\mathrm{k}[X]^G$ изоморфна алгебре $\mathrm{k}[Y]$ функций на некотором аффинном многообразии Y, постройте регулярное отображение $\pi\colon X \to Y$.

b) Покажите, что π постоянно на орбитах действия и что любое регулярное отображение $X \to Z$ в аффинное многообразие, постоянное на орбитах, пропускается через π единственным образом. Эта задача означает, что многообразие Y является *категорным фактором* X по действию группы G.

Задача 6. Опишите алгебры инвариантов и фактормногообразия

a) $\mathbb{A}^1$ по действию циклической группы умножением на корни n-й степени из 1;

b°) $\mathbb{A}^2$ по инволюции $(x, y) \mapsto (-x, -y)$;

c°) $\mathbb{A}^2$ по действию $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $(x, y) \mapsto (\xi x, \xi^{-1} y)$;

d) $\mathbb{A}^2$ по действию, порождённому операторами $(x, y) \mapsto (\xi x, \xi^{-1} y)$ и $(x, y) \mapsto (iy, ix)$;

e) $\mathbb{A}^2$ по действию $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $(x, y) \mapsto (\xi x, \xi y)$;

f) $\mathbb{A}^n$ по действию S_n перестановками координат.

Пусть S – алгебра над k с действием конечной группы G и $|G| \neq 0$ в k.

Задача 7. a) Пусть $\mathfrak{m} \subset S^G$ – максимальный идеал. Покажите, что найдётся максимальный идеал $\mathfrak{m}' \subset S$ такой, что $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap S^G$. Подсказка: проверьте при помощи усреднения, что $S\mathfrak{m} \cap S^G = \mathfrak{m}$.

b) Пусть идеал I лежит в конечном объединении простых идеалов $\mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_n$. Докажите, что тогда I лежит и в некотором идеале $\mathfrak{p}_j$.

c) Пусть $\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'' \subset S$ – два максимальных идеала и $\mathfrak{m}' \cap S^G = \mathfrak{m}'' \cap S^G$. Тогда $\mathfrak{m}'' = g(\mathfrak{m}')$ для некоторого $g \in G$.

d) Пусть $\mathrm{k} = \bar{\mathrm{k}}$. Докажите, что прообраз любой точки $y \in Y$ при морфизме факторизации $\pi\colon X \to Y = X/G$ равен G-орбите некоторой точки $x \in X$. Тем самым, Y биективно фактормножеству X по действию G.