НМУ
Алгебра 3

24 октября 2018
Листок 6

Примарное разложение

Идеал называют *неприводимым*, если его нельзя представить в виде пересечения двух отличных от него идеалов. Идеал I называют *примарным*, если из $xy \in I$ следует $x \in I$ или $y^N \in I$ при некотором натуральном N.

Задача 1. Найдите все a°) неприводимые и b°) примарные идеалы в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{C}[x]$.

c) Приведите пример примарного идеала, не являющегося неприводимым.

Задача 2. Представьте в виде пересечения неприводимых идеалов:

a) идеалы $(60), (100500) \subset \mathbb{Z}$;

b) идеал $(x^2 + y^2 - 1, y - x^2 + 1) \subset \mathbb{C}[x, y]$;

c) идеалы $(x, y)^2, (x, y)^4 \subset \mathbb{C}[x, y]$;

d) идеал $(x^2, xy) \subset \mathbb{C}[x, y]$.

Задача 3. a) Покажите, что простой идеал неприводим.

b°) Покажите, что если простой идеал $\mathfrak{p}$ содержит пересечение $I_1 \cap \ldots \cap I_n$, то он содержит и некоторый идеал I_j.

c°) Покажите, что представление идеала в виде пересечения попарно не вложенных простых идеалов единственно (если существует).

Задача 4. Докажите, что в нётеровом кольце любой идеал представим в виде пересечения конечного числа неприводимых идеалов.

Задача 5. a) Покажите, что идеал $I \subset A$ примарен $\iff$ в факторкольце A/I все делители нуля нильпотентны.

b) Покажите, что радикал $r(I)$ примарного идеала I прост.

c) Покажите, что нётеровом кольце для примарного идеала I имеем $r(I)^N \subset I \subset r(I)$ для некоторого N.

d^*) Докажите, что если $r(I)$ максимален, то I примарен. В частности, для максимального идеала $\mathfrak{m}$ все идеалы $\mathfrak{m}^N$ примарны.

e^*) Пусть $A = \mathbb{C}[x, y, z]/(xy - z^2)$, $\mathfrak{p} = ([x], [z]) \subset A$. Покажите, что идеал $\mathfrak{p}$ простой, но идеал $\mathfrak{p}^2$ не примарный.

Если $I \subset A$ – идеал и $x \in A$ – элемент, положим $I : x = \{y \in A \mid xy \in I\}$.

Задача 6. Пусть кольцо A нётерово.

a) Покажите, что для любых I, x найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что $I : x^n = I : x^m$ для всех $n, m \geqslant N$.

b) Покажите, что для такого N выполнено $I = (I : x^N) \cap (I, x^N)$.

c) Покажите, что любой неприводимый идеал примарен.

Итак, мы доказали теорему Ласкера–Нётер: в нётеровом кольце любой идеал есть пересечение конечного числа примарных. Такое представление идеала называется *примарным разложением.* Оно, как правило, не единственно (даже если выкинуть лишние идеалы). Однако, кое-что сказать можно.

Задача 7. Пусть $I = \cap I_i$ – примарное разложение некоторого идеала. Рассмотрим минимальные по вложению элементы среди простых идеалов $r(I_i)$.

a) Докажите, что их множество не зависит от выбора примарного разложения I. Такие простые идеалы называются *минимальными простыми идеалами, ассоциированными с I.*

b) Докажите, что минимальные простые идеалы, ассоциированные с I, – это в точности минимальные по вложению элементы множества простых идеалов, содержащих I.

c) Пусть $A = \mathrm{k}[X]$ – кольцо регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии X, $I \subset A$ – идеал и $\mathrm{k} = \bar{\mathrm{k}}$. Тогда минимальные простые идеалы, ассоциированные с I, – это в точности идеалы неприводимых компонент подмногообразия $V(I) \subset X$.