НМУ
Алгебра 3

3 октября 2018
Листок 4

Абелевы расширения

Пусть $\xi_n \in \mathbb{C}$ обозначает первообразный корень степени n из 1.

Задача 1. Докажите, что при взаимно простых m и n:

a°) Произведение $\xi_m \xi_n$ – первообразный корень из 1 степени mn, причём так получаются все первообразные корни степени mn.

b°) Верны равенства

$$\mathbb{Q}[\xi_m]\mathbb{Q}[\xi_n] = \mathbb{Q}[\xi_{mn}] \qquad \text{и} \qquad \mathbb{Q}[\xi_m] \cap \mathbb{Q}[\xi_n] = \mathbb{Q}.$$

Напомним, что при $x \in \mathbb{F}_p^*$ символ Лежандра $\left(\frac{x}{p}\right) = x^{\frac{p-1}{2}}$ равен 1, если x – квадрат в $\mathbb{F}_p$, и -1 в противном случае.

Задача 2. Пусть $\mathrm{k} \subset K$ – расширение Галуа, $\mathrm{k} \neq 2$. Рассмотрим $F \subset K$ – подполе, порождённое всеми $\alpha \in K$ такими, что $\alpha^2 \in \mathrm{k}$. Покажите, что F/k – расширение Галуа и опишите $Gal(F, \mathrm{k})$ в терминах $Gal(K, \mathrm{k})$.

Задача 3. Пусть $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$ – круговое расширение, где $p > 2$ – простое число. Рассмотрим подгруппу $H \subset \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \cong Gal(\mathbb{Q}[\xi_p], \mathbb{Q}) = G$ индекса два и соответствующее расширение $K = \mathbb{Q}[\xi_p]^H$ над $\mathbb{Q}$ степени 2. Положим

$$s = \sum_{\sigma \in H} \sigma(\xi_p) - \sum_{\sigma \in G \setminus H} \sigma(\xi_p).$$

a) Докажите, что $s \in K, s^2 \in \mathbb{Q}$.

b) Докажите, что $s^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot p$.

c) Докажите, что любое расширение поля $\mathbb{Q}$ степени 2 лежит в некотором поле $\mathbb{Q}[\xi_n]$.

Последнее пункт — частный случай теоремы Кронекера-Вебера, утверждающей, что любое конечное абелево расширение поля $\mathbb{Q}$ лежит в некотором круговом поле.

Задача 4. Пусть $p \in \mathbb{N}$ – простое число, а $n \in \mathbb{N}$ взаимно просто с p.

a) Покажите, что в $\bar{\mathbb{F}}_p$ есть первообразные корни степени n из 1.

b) Чему равно их количество?

c^*) Чему равна их степень как алгебраических элементов над $\mathbb{F}_p$? Будет ли круговой многочлен $\Phi_n(x)$ неприводим над $\mathbb{F}_p$?

Задача 5. Пусть p и q – различные простые числа, не равные 2, а $\xi \in \bar{\mathbb{F}}_q$ – первообразный корень степени p из 1. Положим

$$s = \sum_{x \in \mathbb{F}_p^*} \left(\frac{x}{p}\right) \cdot \xi^x \in \bar{\mathbb{F}}_q.$$

a) Проверьте, что $s^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot p$.

b) Покажите, что p – квадрат по модулю $q \iff \left(s\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)}\right)^q = s\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)}$.

c) Покажите, что $s^q = s \cdot \left(\frac{q}{p}\right)$.

d) Выведите из предыдущего квадратичный закон взаимности:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$