НМУ
Алгебра 3

26 сентября 2018
Листок 3

Решите уравнение

В задачах этого листка основное поле k имеет характеристику 0.

Задача 1. Пусть $f(x) \in \mathrm{k}[x]$ – многочлен третьей степени, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – его корни, K – его поле разложения, $G = Gal(K, \mathrm{k})$.

a) Пусть f неприводим над k. Докажите, что $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, если $\delta = (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1) \in \mathrm{k}$, и $G = S_3$ в противном случае. Докажите, что $Gal(K, \mathrm{k}[\delta]) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

b) Приведите $f(x)$ заменой переменных к виду $x^3 + px + q$. c) Выразите δ^2 через p и q.
Пусть ξ – нетривиальный кубический корень из единицы. Положим

$$s_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad s_1 = \alpha_1 + \xi\alpha_2 + \xi^2\alpha_3, \quad s_2 = \alpha_1 + \xi^2\alpha_2 + \xi\alpha_3.$$

d°) Покажите, что $s_i^3 \in \mathrm{k}[\delta, \xi]$. Выразите s_i^3 через δ и коэффициенты f.

e°) Выразив α_i через s_j, получите формулу Кардано[1] для корней кубического уравнения:

$$\alpha_i = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

f) Покажите, что $s_1 s_2 = -3p$.

g^*) Пусть $\mathrm{k} = \mathbb{R}$. Покажите, что f имеет три действительных корня $\iff \delta^2 > 0$. Как выбирать знаки и корни в формуле Кардано? Как найти действительные корни f? Разберите случаи $\delta^2 > 0$ и $\delta^2 < 0$.

Задача 2. Пусть $f(x) \in \mathrm{k}[x]$ – неприводимый многочлен четвёртой степени, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – его корни, K – его поле разложения, $G = Gal(K, \mathrm{k})$. Пусть $V_4 \subset S_4$ – подгруппа, состоящая из пар транспозиций.

a) Покажите, что элементы

$$s_{00} = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \quad s_{01} = \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4, \quad s_{10} = \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4, \quad s_{11} = \alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4$$

поля K – собственные векторы относительно перестановок из V_4.

b) Пусть $F = K^{G\cap V_4}$. Покажите, что F/k – расширение Галуа, и группа

$$Gal(F, \mathrm{k}) \cong G/(G \cap V_4) \subset S_4/V_4 \cong S_3$$

действует перестановками на элементах $s_{01}^2, s_{10}^2, s_{11}^2 \in F$.

c) Приведите $f(x)$ заменой переменных к виду $x^4 + px^2 + qx + r$.

d) Составьте кубическое уравнение, корнями которого являются $s_{01}^2, s_{10}^2, s_{11}^2$. Выразите его коэффициенты через коэффициенты f.

e) Как решать уравнения четвёртой степени в радикалах[2]?

f^*) Какой может быть G в случае $\mathrm{k} = \mathbb{Q}$? Приведите примеры.

Задача 3. Пусть $f(x) \in \mathrm{k}[x]$ – неприводимый многочлен степени n, α_i – его корни, K – его поле разложения, $G = Gal(K, \mathrm{k})$. Докажите, что

a) $G \subset A_n \iff \delta = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j) \in \mathrm{k}$;

b) $Gal(K, \mathrm{k}[\delta])$ состоит из чётных перестановок;

c) $\delta^2 \in \mathrm{k}$;

d) $\delta^2 = \pm Res(f, f')/a_n^{2n-1}$, где a_n – старший коэффициент f.

e) Вспомните, чему равен знак в предыдущей формуле.

---

[1] В честь Джероламо Кардано, первым опубликовавшего её в 1545 г.

[2] Первым эту задачу решил Луиджи Феррари в 1540-х годах.