Независимый Московский Университет, Алгебра-1, осень 2018

2

Дискриминанты кубических многочленов

2.1. При каких p и q многочлен x^3+px+q имеет кратный корень?

2.2. Пусть $\{x_1, x_2, x_3\}$ – *разные* корни многочлена x^3+px+q? Вычислите $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$. Можно ли в формулировке этой задачи опустить слово *разные*? Как изменить формулировку, чтобы она охватывала и многочлены с кратными корнями?

2.3. Выразите через коэффициенты кубического многочлена произведение значений производной многочлена в его корнях.

2.4. Выразите через коэффициенты кубического многочлена произведение значений многочлена в корнях его производной.

2.5*. Обобщите результаты задач **2.1 - 2.4** на случай многочленов произвольных степеней (начиная с квадратных трёхчленов).

Конгруэнтные числа и кубические кривые

2.6. Рациональное число называется *конгруэнтным*, если оно является площадью прямоугольного треугольника с рациональными сторонами. Докажите, что число конгруэнтно тогда и только тогда, когда оно является разностью трёхчленной арифметической прогрессии, состоящей из квадратов рациональных чисел. **Намёки.** Число 6 конгруэнтно: это – площадь "египетского" треугольника со сторонами 3,4,5. Свойство конгруэнтности выдерживает умножение на квадрат рационального числа. Число 24 – разность арифметической прогрессии 1, 25, 49, причём $1=(4-3)^2, 25=5^2$ и $49=(4+3)^2$.

2.7. Докажите, что, если число S конгруэнтно, то на кривой

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y^2=x^3-S^2x\}$$

лежит *рациональная* точка $(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, причём $y\neq 0$.

2.8. Пусть *кубическая* кривая задана в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ уравнением $y^2=f(x)$, где f – кубический многочлен с рациональными коэффициентами без кратных корней. Докажите, что кривая *гладка*, и если на ней лежит рациональная точка, то касательная к кривой в этой точке либо *вертикальна*, либо пересекает кривую ещё в одной точке, которая тоже рациональна.

2.9*. Пользуясь известными вам *пифагоровыми* треугольниками, найдите по несколько рациональных точек на кривых вида $y^2=x^3-S^2x$.

Сведение уравнений 4й степени к уравнениям 3й

2.10. Пусть при любом x имеет место равенство

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=x^4+ax^2+bx+c.$$

Составьте кубическое уравнение вида $y^3+my^2+py+q=0$ с корнями $y_1=x_1x_2+x_3x_4,\ y_2=x_1x_3+x_2x_4,\ y_3=x_1x_4+x_2x_3$.

27 сентября, *Г.Б. Шабат*